

ПОПРАВКИ ДВЕНАДЦАТОГО ПОРЯДКА К ЛЕПТОННЫМ АНОМАЛИЯМ, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ ВСТАВКАМИ ПОЛЯРИЗАЦИИ ВАКУУМА ЛЕПТОННЫМИ ПЕТЛЯМИ В РАМКАХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МЕЛЛИНА–БАРНСА

О. П. Соловцова^{1,2,*}, *В. И. Лашкевич*^{2,**}
Л. П. Каптарь^{1,***}

¹ Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия

² Гомельский государственный технический университет, Гомель, Беларусь

Получены явные аналитические выражения для электромагнитных поправок к аномальным магнитным моментам a_L лептонов ($L = e, \mu$ и τ) в двенадцатом порядке разложения по электрическому заряду e . Рассматривается фейнмановская диаграмма со вставками поляризационного оператора из пяти одинаковых лептонных петель, образованных лептонами сорта ℓ , отличного от исходного лептона L , $\ell \neq L$. Подход основан на последовательном применении дисперсионных соотношений для поляризованного оператора и на преобразовании Меллина–Барнса для пропагаторов массивных частиц. Точные выражения далее раскладываются в ряд по отношению лептонных масс $r = m_\ell/m_L$, и детально исследуются пределы как малых, $r \rightarrow 0$, так и больших, $r \rightarrow \infty$, значений r . Показано, что для реальных лептонов (электрона, мюона и τ -лептона) расчет по точным выражениям можно заменить на вычисления по более простым приближенным формулам с учетом числа членов в зависимости от требуемой точности.

The twelfth order electromagnetic corrections to the lepton ($L = e, \mu$, and τ) anomaly a_L due to Feynman diagrams with insertions of the vacuum polarization operator consisting of five identical lepton loops ℓ are obtained in analytical explicit form. The approach is based on the consecutive application of dispersion relations for the vacuum polarization operator and on the Mellin–Barnes transform for the propagators of massive particles. Detailed investigations of the asymptotical expression in the region of small $r \rightarrow 0$ and large $r \rightarrow \infty$ values of the lepton mass ratio $r = m_\ell/m_L$ are performed keeping a reasonable number of terms in dependence on the required accuracy. It is argued that for the values of r corresponding to real existing leptons, the simpler approximate formulae assure rather high accuracies in numerical calculations.

PACS: 13.40.Em; 12.20.Ds; 14.60.Ef

* E-mail: olsol@theor.jinr.ru

** E-mail: lashkevich@gstu.by

*** E-mail: kaptari@theor.jinr.ru

ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что взаимодействие заряженных лептонов L с фотонами приводит к сдвигу гироманнитного отношения g_L от значения, равного 2, следующего из уравнения Дирака для заряженной частицы со спином $1/2$ [1]. Величина этого сдвига определяется аномальным магнитным моментом лептона (лептонной аномалией) и характеризуется величиной $a_L = (g_L - 2)/2$. Выражение для лидирующей поправки к аномальному моменту электрона было получено еще в 1948 г. Ю. Швингером, $a_e = \alpha/(2\pi) \simeq 0,001161$, где $\alpha = e^2/(4\pi)$ есть постоянная тонкой структуры. Теоретические и экспериментальные исследования лептонной аномалии, несмотря на малость a_L , играют важную роль при решении фундаментальных вопросов физики элементарных частиц [2, 3]. Это связано с тем, что измерения a_L для электрона и мюона проведены с чрезвычайно высокой точностью (в настоящее время относительная точность $\sim 10^{-10}$ для a_e [4] и $\sim 10^{-7}$ для a_μ [5]), что накладывает соответствующие требования к теоретическим расчетам (см. недавние обзоры [6, 7] и ссылки в них).

В рамках Стандартной модели поправки к a_L имеют квантово-электродинамическую, электрослабую и адронную природу. Высокоточные численные расчеты электродинамических поправок, включающие всевозможные взаимодействия лептонов с фотонами в рассматриваемом порядке, затрагивают вычисления огромного числа диаграмм Фейнмана и, соответственно, требуют значительных компьютерных ресурсов, разработки специальных алгоритмов и тщательной независимой проверки численных результатов (как пример см. работы [8–11]). В связи с этим представляет интерес выделить хотя бы подкласс диаграмм, для которых удастся провести расчеты в аналитическом, замкнутом виде, что позволяет прямое сравнение с соответствующими численными расчетами. К такому подклассу относятся диаграммы со вставками фотонного поляризационного оператора, состоящего из лептонных петель. Особый интерес представляют так называемые диаграммы «пузырькового» типа, когда все петли состоят только из лептонов без дополнительных фотонных линий. Расчеты по точным формулам помогут найти численные значения интересующих вкладов в a_L с любой наперед заданной точностью и сравнить с уже имеющимися чисто численными расчетами, а также получить более простые выражения в виде разложений по отношению лептонных масс с контролируемой точностью.

В работе [12] на основании интегрального представления Меллина–Барнса рассматривалась задача о нахождении аналитических выражений для поправок к a_μ от диаграмм «пузырькового» типа в виде разложений по отношению масс петлевых лептонов ℓ к массе внешнего лептона L (мюона). Обобщение подхода [12] для случая любого заряженного лептона и, более того, для любого значения отношений лептонных масс, $0 < r = m_\ell/m_L < \infty$, было представлено в [13].

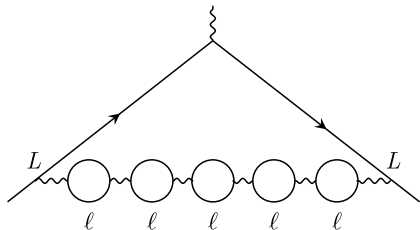


Рис. 1. Диаграмма, дающая вклад в поправку двенадцатого порядка в аномальный магнитный момент лептона L , в случае, когда все лептоны в петлях одного сорта. Диаграмма включает также случай $\ell = L$

Настоящая работа является дальнейшим развитием и применением подхода [12, 13] при нахождении аналитических выражений для поправок к a_L более высокого порядка по сравнению с поправками, полученными в работах [14–17]. Исследуются вклады от диаграмм со вставками в поляризационный оператор из пяти лептонных петель, образованных лептонами сорта ℓ , отличного от исходного, $\ell \neq L$, и подробнее описывается случай пяти одинаковых лептонных петель (рис. 1). Впервые получены как точные, так и приближенные аналитические выражения при малых, $r \rightarrow 0$, а также при больших, $r \rightarrow \infty$, значениях r .

1. АНАЛИТИЧЕСКИЕ РАСЧЕТЫ

Нахождение точных выражений для электромагнитных поправок от диаграмм с n замкнутыми петлями, p из которых образованы лептонами сорта L , а j — лептонами сорта ℓ , в рамках подхода, использующего преобразование Меллина–Барнса, детально разобрано в работе [13]. Исходное выражение имеет вид

$$a_L(p, j) = \frac{\alpha}{\pi} \frac{1}{2\pi i} F_{(p,j)} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dz \left(\frac{4m_\ell^2}{m_L^2} \right)^{-z} \Gamma(z) \Gamma(1-z) \times \\ \times \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^p \Omega_p(z) \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^j R_j(z), \quad (1)$$

где $F_{(p,j)} = (-1)^{p+j+1} C_{p+j}^p$, а C_{p+j}^p — биномиальные коэффициенты; c — любое число из интервала $a < \operatorname{Re} z < b$, в котором подынтегральная функция (1) аналитична. Меллиновские моменты $\Omega_p(z)$ и $R_j(z)$ определяются поляризационными операторами $\Pi^{(L)}$ и $\Pi^{(\ell)}$ согласно выражениям

$$\left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^p \Omega_p(z) = \int_0^1 dx x^{2z} (1-x)^{1-z} \left[\Pi^{(L)} \left(-\frac{x^2}{1-x} m_L^2 \right) \right]^p, \quad (2)$$

$$\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^j R_j(z) = \int_0^\infty \frac{dy}{y} \left(\frac{4m_\ell^2}{y}\right)^z \frac{1}{\pi} \text{Im} \left[\Pi^{(\ell)}(y) \right]^j. \quad (3)$$

Явный вид поляризационных операторов $\Pi^{(L,\ell)}$ в формулах (2) и (3) хорошо известен, см. [12, 17].

В публикациях общепринято классифицировать электродинамические вклады в аномальный магнитный момент a_L в зависимости от отношения $r = m_\ell/m_L$, выделяя при этом масс-независимый вклад A_1 и масс-зависимые A_2 и A_3 , каждый из которых представляется в виде разложения по постоянной тонкой структуры α как (см., например, [18])

$$\begin{aligned} A_1 \left(\frac{m_L}{m_L} \right) &= \sum_{i=1} A_1^{(2i)} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^i, \\ A_2 \left(\frac{m_\ell}{m_L} \right) &= \sum_{i=2} A_2^{(2i)} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^i \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (4)$$

Отметим, что лидирующей поправке (швингеровский член) соответствует коэффициент $A_1^{(2)} = 1/2$. Коэффициент A_3 относится к случаю, когда все три лептона разные, и зависит от двух отношений масс: $r_1 = m_{\ell_1}/m_L$ и $r_2 = m_{\ell_2}/m_L$.

Коэффициент разложения, определяющий вклад в аномальный магнитный момент лептона L от поляризации вакуума пятью одинаковыми лептонными петлями $a_L(0,5) = A_2^{(12),5\ell}(\alpha/\pi)^6$ (где введенный дополнительный индекс «5 ℓ » указывает непосредственно на конкретный тип поляризационного оператора, см. рис. 1), определяется меллиновскими моментами $\Omega_0(z)$ и $R_5(z)$. После подстановки явных выражений для $\Omega_0(z)$ и $R_5(z)$ в исходный интеграл (1) и несложных преобразований получаем

$$A_2^{(12),5\ell} \left(\frac{m_\ell}{m_L} \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\frac{4m_\ell^2}{m_L^2} \right)^{-z} \mathcal{F}(z) dz, \quad (5)$$

где подынтегральная функция $\mathcal{F}(z)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(z) &= \left[\frac{5}{6561} \frac{N_1(z)}{Q_1(z)} + \frac{10}{27} \frac{N_2(z)}{Q_1(z)} \left(2\psi^{(1)}(z) - \frac{\pi^2}{3} \right) + \frac{50}{3} N_3(z)(1+z)^2 \times \right. \\ &\quad \times \left. \left(6(\psi^{(1)}(z))^2 + \psi^{(3)}(z) - 2\pi^2\psi^{(1)}(z) + \frac{\pi^4}{10} \right) \right] \times \\ &\quad \times \frac{\pi^2(1-z)}{Q_2(z)(1+z)(2+z) \sin^2(\pi z)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $\psi^{(k)}(z)$ — полигамма-функция k -го порядка ($k = 1, 2, 3$) и для краткости записи введены обозначения

$$\begin{aligned} N_1(z) &= 3362591232 + 34462877976z - 7715002446z^2 - 112423073115z^3 - \\ &\quad - 106919635274z^4 + 6563589052z^5 + 78097655768z^6 + \\ &\quad + 65706605267z^7 + 29226969024z^8 + 8053533108z^9 + \\ &\quad + 1418298368z^{10} + 155629568z^{11} + 9699328z^{12} + 262144z^{13}, \\ N_2(z) &= 80208000 + 63155640z - 287700558z^2 - 571876945z^3 - \\ &\quad - 358461343z^4 + 21115161z^5 + 156212628z^6 + 100205115z^7 + \\ &\quad + 33458487z^8 + 6686149z^9 + 804130z^{10} + 53760z^{11} + 1536z^{12} \\ N_3(z) &= 5005 + 4416z + 1389z^2 + 186z^3 + 9z^4, \\ Q_1(z) &= z(1+z)(2+z)(3+z)(4+z)(5+z), \\ Q_2(z) &= (1+2z)(3+2z)(5+2z)(7+2z)(9+2z) \times \\ &\quad \times (11+2z)(13+2z)(15+2z). \end{aligned}$$

Очевидно, что подынтегральная функция в (5) сингулярна в комплексной плоскости переменной z с многочисленными полюсами различной кратности, обусловленными знаменателями в $\mathcal{F}(z)$ и сингулярностями функций $\psi^{(k)}(z)$, $1/\sin^2(\pi z)$, а также нулями полиномов $Q_1(z)$ и $Q_2(z)$. Тогда интеграл (5) может быть вычислен по теореме Коши о вычетах замыканием контура интегрирования поочередно в левой ($r < 1$) и правой ($r > 1$) полуплоскостях. Далее, для простоты, наряду с отношением масс лептонов r часто будем использовать квадрат их отношения, $t = r^2$.

Функция $\mathcal{F}(z)$ имеет в левой полуплоскости полюсы при $z = -1/2, -3/2, -5/2, -7/2, -9/2, -11/2, -13/2, -15/2, 0, -1, -2, -3, -4, \dots, -n, \dots$. Вычеты в точках z с отрицательными полуцелыми значениями $z = -1/2, -3/2, -5/2, -7/2, -9/2, -11/2, -13/2, -15/2$ вычисляются непосредственно как вычеты в полюсах первого порядка. При отрицательных целочисленных значениях $z = -n$ вычеты при $z = 0, -1, -2, -3, -4, -5$ также вычисляются непосредственно. Начиная с $z = -6$, мы находим вычеты с использованием соответствующих пакетов Wolfram Mathematica.

Результат применения теоремы Коши для интеграла (5) в *левой полуплоскости* может быть представлен в виде разложения по степеням логарифма $\ln(t)$ и бесконечной суммы

$$\begin{aligned} A_2^{(12),5\ell}(t < 1) &= P_0(t) + P_1(t) \ln(t) + P_2(t) \ln^2(t) + P_3(t) \ln^3(t) + \\ &\quad + P_4(t) \ln^4(t) + P_5(t) \ln^5(t) + P_6(t) \ln^6(t) + \sum_{n=6}^{\infty} U_1(n, t) t^n. \quad (7) \end{aligned}$$

Полиномы $P_n(t)$ по переменной t при степенях логарифмов $\ln^n(t)$ ($n = 0, \dots, 6$) содержат также полилогарифмы $\text{Li}_m(t)$ ($m = 2, \dots, 6$) и $\zeta(s)$ -функции Римана ($\zeta(s) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$, $s = 2, \dots, 5$). Кроме того, степени логарифма (до 3-й степени включительно) и полигамма-функция $\psi^{(k)}(n)$ ($k = 1, \dots, 4$) содержатся в функции $U_1(n, t)$ в (7).

Правая полуплоскость: $t > 1$. Результат применения теоремы Коши в правой полуплоскости, в которой функция $\mathcal{F}(z)$ имеет бесконечное число полюсов при целых положительных значениях z ($z = 1, 2, \dots$), может быть представлен в следующем виде*:

$$\begin{aligned} A_2^{(12),5\ell}(t > 1) = & D_0(t) + D_1(t) \ln(t) + D_2(t) \left[\text{Li}_2\left(\frac{1}{t}\right) \ln(t) + 2\text{Li}_3\left(\frac{1}{t}\right) \right] + \\ & + D_3(t) \left[-\text{Li}_2\left(\frac{\sqrt{t}-1}{\sqrt{t}+1}\right) + \text{Li}_2\left(-\frac{\sqrt{t}-1}{\sqrt{t}+1}\right) \right] + \\ & + D_4(t) \left[\text{Li}_2\left(1 - \frac{1}{t}\right) \right] \frac{1}{t} + \sum_{n=2}^{\infty} U_2(n, t) t^{-n}. \end{aligned} \quad (8)$$

Структура коэффициентов $D_n(t)$ аналогична описанной выше структуре коэффициентов $P_n(t)$, так же как и структура функции $U_2(n, t)$ аналогична структуре $U_1(n, t)$ в выражении (7).

Ввиду громоздкости точных выражений для коэффициентов в (7) и (8) их явный вид здесь не приводится. Мы только отмечаем, что расчеты по точным формулам были проверены на согласие с численными расчетами исходного интеграла и с известным из публикаций аналитическим выражением для частного случая, когда все лептоны одного сорта [20] ($r = 1$):

$$\begin{aligned} A_1^{(12)} = & \frac{428632663}{42987672} + \frac{19672\pi^4}{1607445} - \frac{80\pi^6}{5103} + \frac{83360\zeta(5)}{22113} = \\ & = 3,4468727205 \dots \cdot 10^{-4}. \end{aligned} \quad (9)$$

2. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

Для всех комбинаций реально существующих лептонов (электрона, мюона и τ -лептона) отношения их масс находятся в области либо $r < 0,06$, либо $r > 16$. Это позволяет использовать вместо точных выражений $A_2^{(12),5\ell}(r)$ более простые асимптотические разложения, сохраняя при этом конечное число членов разложения в соответствии с желаемой точностью результата.

* Вычет в точке $z = 1$ равен нулю.

Асимптотическое разложение, получаемое из (7) при $r \ll 1$ ($t = r^2$), содержит часть, $\mathcal{A}_0(r)$, не зависящую от порядка разложения, преобладающую в пределе $r \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0(r) = & -\frac{16}{243} \ln^5(r) - \frac{500}{729} \ln^4(r) - \\ & - \left(\frac{6340}{2187} + \frac{80\pi^2}{729} \right) \ln^3(r) - \left(\frac{43045}{6561} + \frac{80\zeta(3)}{81} + \frac{500\pi^2}{729} \right) \ln^2(r) - \\ & - \left(\frac{323065}{39366} + \frac{1000\zeta(3)}{243} + \frac{3170\pi^2}{2187} + \frac{4\pi^4}{81} \right) \ln(r) - \\ & - \frac{2182775}{472392} - \frac{43045\pi^2}{39366} - \frac{3170\zeta(3)}{729} - \frac{40\pi^2\zeta(3)}{243} - \frac{25\pi^4}{243} - \frac{40\zeta(5)}{27}. \quad (10) \end{aligned}$$

Отметим, что расходимость в этой формуле логарифмических слагаемых при $r \rightarrow 0$, в принципе, не критична, поскольку в физической области отношений лептонных масс ($m_e/m_\tau \leq r \leq m_\mu/m_\tau$) минимальное значение $r_{\min} = r(m_e/m_\tau) \sim 3 \cdot 10^{-4}$ и формула (10) дает конечное значение.

Оставшаяся часть разложения, получаемого из (7) при $r \ll 1$, уже зависит от порядка разложения по r . Если ограничиться разложением до порядка r^5 включительно, то полное выражение для коэффициента $A_2^{(12),5\ell}(r < 1)$ будет иметь вид

$$\begin{aligned} A_{2,as}^{(12),5\ell}(r < 1) = & \mathcal{A}_0(r) + \left[\frac{7135}{110592} \pi^6 - \frac{5591}{107163} \pi^4 \right] r + \\ & + \left[\frac{24620\pi^2}{6561} + \frac{52\pi^4}{81} + \frac{6080\zeta(3)}{243} + \frac{608480\zeta(5)}{27027} + \frac{160\pi^2\zeta(3)}{81} + \right. \\ & + \frac{65771}{729729} + \frac{64}{81} \ln^5(r) + \frac{1040}{243} \ln^4(r) + \left(\frac{320\pi^2}{243} + \frac{12160}{729} \right) \ln^3(r) + \\ & + \left(\frac{1040\pi^2}{243} + \frac{320\zeta(3)}{27} + \frac{49240}{2187} \right) \ln^2(r) + \\ & + \left. \left(\frac{6080\pi^2}{729} + \frac{16\pi^4}{27} + \frac{2080\zeta(3)}{81} + \frac{265100}{6561} \right) \ln(r) \right] r^2 - \\ & - \left[\frac{73925}{110592} \pi^6 - \frac{50}{189} \pi^4 \right] r^3 + \left[\frac{108290\pi^2}{6561} - \frac{124520\zeta(3)}{2187} + \frac{275\pi^4}{243} - \right. \\ & - \frac{517040\zeta(5)}{18711} + \frac{1220\pi^6}{5103} + \frac{400\zeta(3)^2}{27} - \frac{80\pi^2\zeta(3)}{27} + \frac{8035215035}{36374184} - \\ & - \frac{32\ln^5(r)}{27} + \left. \left(\frac{400\pi^2}{243} + \frac{5500}{729} \right) \ln^4(r) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{1600\zeta(3)}{81} - \frac{160\pi^2}{81} - \frac{249040}{6561} \right) \ln^3(r) + \\
& + \left(\frac{40\pi^4}{27} - \frac{160\zeta(3)}{9} + \frac{5500\pi^2}{729} + \frac{216580}{2187} \right) \ln^2(r) + \\
& + \left(\frac{800\pi^2\zeta(3)}{81} - \frac{124520\pi^2}{6561} + \frac{11000\zeta(3)}{243} - \frac{8\pi^4}{9} + \frac{800\zeta(5)}{9} - \right. \\
& \left. - \frac{4094030}{19683} \right) \ln(r) + \frac{160\ln^6(r)}{243} \Big] r^4 - \left(\frac{7\pi^4}{243} + \frac{10255\pi^6}{36864} \right) r^5 + \mathcal{O}(r^6).
\end{aligned} \tag{11}$$

Сравнение результатов, полученных из точной формулы (7) и асимптотической (11), показывает, что в физической области r относительная точность $\varepsilon = |A_{2,as}^{(12),5\ell}(r) - A_2^{(12),5\ell}(r)| / A_2^{(12),5\ell}(r)$ не хуже чем 10^{-5} .

В правой полуплоскости из формулы (8) следует

$$\begin{aligned}
A_{2,as}^{(12),5\ell}(r \gg 1) = & \frac{1}{r^4} \left(\frac{23717113727}{10691463903120} + \frac{1216\zeta(3)}{178605} - \frac{84100\zeta(5)}{8729721} \right) + \\
& + \frac{1}{r^6} \left(\frac{68782608619}{18710061830460} + \frac{3592\zeta(3)}{1528065} - \frac{23840\zeta(5)}{3741309} \right) + \\
& + \frac{1}{r^8} \left(\frac{408567816029}{85120501074840} - \frac{120118\zeta(3)}{229864635} - \frac{337720\zeta(5)}{86050107} \right) + \\
& + \frac{1}{r^{10}} \left(\frac{8649012016174547}{1793047592085750000} - \frac{8\ln(t)}{50625} - \frac{102316\zeta(3)}{59594535} - \frac{165824\zeta(5)}{66927861} \right) + \\
& + \mathcal{O}(1/r^{12}). \tag{12}
\end{aligned}$$

Отметим, что разложение (12) содержит только четные степени r и оно более компактно по сравнению с (11). Также интересно отметить, что (12) не содержит слагаемых с π^2 -членами, т. е. ζ -функций при четных значениях аргумента, хотя исходно в (8) слагаемые, содержащие π^2 , π^4 и π^6 , присутствовали.

На рис. 2 приведено сравнение результатов расчетов, получаемых по точным формулам, с результатами разложений при $r \ll 1$ (а) и $r \gg 1$ (б). Из этого рисунка видно, что расчеты по приближенным асимптотическим формулам практически совпадают с расчетами по точным в большом интервале переменной r , а именно ($0 < r < 0,1$) для разложения вблизи $r \rightarrow 0$ и ($2 < r < \infty$) для разложения при $r \gg 1$. Для реальных лептонов эти два интервала полностью перекрывают все возможные значения $r = m_\ell/m_L$ при всех возможных комбинациях масс внутренних ℓ и внешних L лептонов, что указывает на то, что асимптотические разложения вполне могут быть использованы не только для качественного, но и для

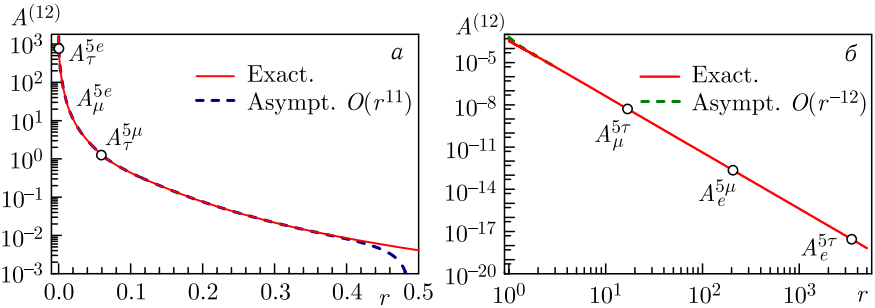


Рис. 2. Сравнение точных расчетов с результатами вычислений по асимптотическим формулам для $r < 1$ (а), для $r > 1$ (б). Сплошная линия — это точный результат, штриховая соответствует асимптотическому разложению. Кружками обозначены значения коэффициентов при реальных физических массах лептонов для всех возможных комбинаций внутренних ℓ и внешних L лептонов

Значения коэффициента $A_{2,L}^{(12),5\ell}(t = r^2)$ для физических лептонов с учетом неопределенности их масс [21]

$r < 1$			
m_l/m_L	m_e/m_τ	m_e/m_μ	m_μ/m_τ
r	0,000287585(19)	0,00483633169(11)	0,0594635(40)
A_2	764,00(4)	58,387811(1)	1,2589(4)
$r > 1$			
m_l/m_L	m_τ/m_μ	m_μ/m_e	m_τ/m_e
r	16,8170(11)	206,7682830(46)	3477,23(23)
A_2	$5,155(3) \cdot 10^{-9}$	$2,2584123(2) \cdot 10^{-13}$	$2,822(2) \cdot 10^{-18}$

количественного анализа поправок к аномальному магнитному моменту любого лептона (e , μ и τ) с любыми лептонными вставками.

Для полноты в таблице приведены результаты численных оценок коэффициента $A_{2,L}^{(12),5\ell}(r)$ при физических значения лептонных масс с учетом их погрешностей [21]. Применительно к оценке вклада в аномальный магнитный момент мюона от поляризации вакуума пятью лептонными петлями следует подчеркнуть, что в случае, когда все петли являются электронными, вклад $A_{2,\mu}^{(12),5e}(\alpha/\pi)^6$ определяющий, поскольку составляет $\sim 84,4\%$ от общего вклада в a_μ от поляризации вакуума пятью лептонными петлями.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлена структура точных аналитических выражений для поправок двенадцатого порядка к аномальным магнитным моментам лептонов (e , μ и τ) от фейнмановских диаграмм со вставками поляриза-

ционного оператора, состоящего из пяти одинаковых лептонных петель. Подход основан на интегральном представлении Меллина–Барнса, применение которого позволило получить аналитические выражения для соответствующих поправок во всем диапазоне изменения отношения массы лептона ℓ в петле к массе внешнего лептона L , $r = m_\ell/m_L$. Используя точные аналитические выражения, легко получить численные значения соответствующих поправок с любой наперед заданной точностью. Из точных выражений впервые были получены более простые асимптотические разложения, и показано, что для реальных лептонов (электрона, мюона и τ -лептона) расчет по точным вполне можно заменить на вычисления по приближенным формулам при выборе числа членов разложения в зависимости от желаемой точности.

Финансирование. Данная работа полностью финансировалась за счет средств бюджета Объединенного института ядерных исследований в рамках гранта сотрудничества между Объединенным институтом ядерных исследований и учреждениями Республики Беларусь в 2025 г.

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dirac P. A. M.* The Quantum Theory of the Electron // Proc. Roy. Soc. Lond. A. 1928. V. 117. P. 610–624.
2. *Jegerlehner F.* The Anomalous Magnetic Moment of the Muon // Springer Tracts Mod. Phys. 2017. V. 274. P. 1–693.
3. *Aoyama T., Kinoshita T., Nio M.* Theory of the Anomalous Magnetic Moment of the Electron // Atoms. 2019. V. 7. P. 1–27.
4. *Fan X., Myers T. G., Sukra B. A. D., Gabrielse G.* Measurement of the Electron Magnetic Moment // Phys. Rev. Lett. 2023. V. 130. P. 071801.
5. *Aguillard D. P. et al. (Muon $g - 2$ Collab.).* Measurement of the Positive Muon Anomalous Magnetic Moment to 127 ppb // Phys. Rev. Lett. 2025. V. 135. P. 101802.
6. *Aliberti R. et al.* The Anomalous Magnetic Moment of the Muon in the Standard Model: An Update // Phys. Rep. 2025. V. 1143. P. 1–188.
7. *Gabrielse G., Venanzoni G.* Measured Lepton Magnetic Moments. arXiv: 2507.11268 [hep-ex].
8. *Laporta S.* High-Precision Calculations of Multiloop Feynman Integrals by Difference Equations // J. Mod. Phys. A. 2000. V. 15. P. 5087–5159.
9. *Laporta S.* High-Precision Calculations of the 4-Loop Contribution to the Electron $g - 2$ in QED // Phys. Lett. B. 2017. V. 772. P. 232–238.
10. *Laporta S.* Calculation of the Total 10th Order QED Contribution to the Electron Magnetic Moment // Phys. Rev. D. 2024. V. 110. P. 036001.
11. *Aoyama T., Hayakawa M., Hirayama A., Nio M.* Verification of the Tenth-Order QED Contribution to the Anomalous Magnetic Moment of the Electron from Diagrams without Fermion Loops // Phys. Rev. D. 2025. V. 111. P. L031902.

12. *Aguilar J. P., Greynat D., Rafael E.* Muon Anomaly from Lepton Vacuum Polarization and the Mellin–Barnes Representation // *Phys. Rev. D.* 2008. V. 77. P. 093010.
13. *Solovtsova O. P., Lashkevich V. I., Kaptari L. P.* Lepton Anomaly from QED Diagrams with Vacuum Polarization Insertions within the Mellin–Barnes Representation // *Eur. Phys. J. Plus.* 2023. V. 138. P. 212.
14. *Лашкевич В. И., Соловцова О. П., Каптарь Л. П.* Аналитические расчеты электромагнитных поправок пятого порядка к аномальному магнитному моменту лептонов в представлении Меллина–Барнса // *Изв. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук.* 2023. Т. 59. С. 338–351.
15. *Solovtsova O. P., Lashkevich V. I., Kaptari L. P.* Analytical Calculations of the Tenth-Order QED Radiative Corrections to Lepton Anomalies within the Mellin–Barnes Representation // *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* 2024. V. 51. P. 055001.
16. *Solovtsova O. P., Lashkevich V. I., Kaptari L. P.* Tenth-Order QED Correction to the Lepton Anomaly Due to Some Bubble Diagrams // *J. Nonlin. Phenom. Complex Syst.* 2024. V. 27. P. 386–397.
17. *Соловцова О. П., Лашкевич В. И., Каптарь Л. П.* Аналитические расчеты вкладов в аномальные магнитные моменты лептонов от поляризации вакуума лептонными петлями на основе представления Меллина–Барнса // *ЭЧАЯ.* 2025. Т. 56, вып. 2. С. 414–430.
18. *Aoyama T. et al.* The Anomalous Magnetic Moment of the Muon in the Standard Model // *Phys. Rep.* 2020. V. 887. P. 1–166.
19. *Schwinger J. S.* On Quantum Electrodynamics and the Magnetic Moment of the Electron // *Phys. Rev.* 1948. V. 73. P. 416–417.
20. *Laursen M. L., Samuel M. A.* The n -Bubble Diagram Contribution to $(g - 2)$ of the Electron. Mathematical Structure of the Analytical Expression // *Phys. Lett. B.* 1980. V. 91. P. 249–252.
21. *Tiesinga E., Mohr P. J., Newell D. B., Taylor B. N.* CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants: 2018 // *Rev. Mod. Phys.* 2021. V. 93. P. 025010.