

МАССЫ ЛЕГКИХ КВАРКОВ В $1/N_c$ КИРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

А. А. Осипов^{1, *}

¹ Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия

Массовые формулы псевдоскалярных $\pi^\pm$, $K^\pm$, $K^0(\bar{K}^0)$ -мезонов, полученные в NLO-приближении комбинированного разложения по импульсам, массам кварков m_q и $1/N_c$, позволяют сделать заключение о принадлежности отношений m_u/m_d и m_s/m_d алгебраической кривой третьего порядка. Показано, что учет высших поправок не влияет на вид кривой. Данные о величине констант эффективного лагранжиана, полученные из вычислений на решетке, позволяют определить массы кварков.

The mass formulas for the pseudoscalar $\pi^\pm$, $K^\pm$, $K^0(\bar{K}^0)$ mesons, obtained in the NLO approximation of the combined expansion in momenta, quark masses m_q and $1/N_c$, allow us to conclude that the ratios m_u/m_d and m_s/m_d belong to a third-order algebraic curve. It is shown that taking into account higher-order corrections does not affect the shape of the curve. Data on the constants of the effective Lagrangian, obtained from lattice calculations, allow us to determine the quark masses.

PACS: 12.38.Lg; 12.39.Fe; 14.40.Aq; 14.65.Bt

ВВЕДЕНИЕ

Массы кварков являются фундаментальными параметрами квантовой хромодинамики (КХД), отражают закономерности нарушения слабой и электромагнитной калибровочной симметрии и, кроме того, содержат информацию о структуре ароматов в физике за пределами Стандартной модели. Поэтому знание этих параметров важно как для феноменологических, так и для теоретических приложений [1]. Кварки находятся в связанном состоянии внутри адронов, что исключает прямое измерение массы изолированного кварка. Особую роль природа отвела легким u -, d - и s -кваркам, массы которых определяют степень явного нарушения киральной $SU(3)_L \times SU(3)_R$ симметрии в КХД. Поскольку массы легких кварков малы по сравнению с характерными адронными масштабами, их влияние на адронные наблюдаемые незначительно. Независимость сильных взаимодействий от ароматов еще более усложняет задачу экспериментального изучения проблемы масс кварков.

* E-mail: aaosipov@theor.jinr.ru

Определение масс легких кварков на фундаментальном уровне — задача, стоящая перед квантовой теорией поля. Сложность заключается в том, что ее применение для расчетов адронных наблюдаемых требует непertурбативных методов. Одним из таких инструментов являются вычисления на решетке, которые, в частности, используются и для извлечения информации о массах кварков. В настоящее время наиболее надежные данные о массах легких кварков получены именно таким путем [2, 3].

Другим инструментом являются эффективные теории поля (EFTs). Они представляют последовательную схему для вычисления наблюдаемых и могут использоваться даже для описания непertурбативной динамики. Ключевой элемент любой EFT — систематическое разложение с четко определенной процедурой вычисления поправок более высокого порядка по параметрам разложения.

Так, низкоэнергетическая динамика октета псевдоскалярных мезонов π , K и η может быть описана $SU(3)$ киральной теорией возмущений (χ PT) [4], в которой проводится разложение амплитуд по степеням импульсов p_μ и токовых масс кварков m_q .

Включение η' -мезона требует введения дополнительного параметра разложения $1/N_c$, где N_c — число цветов кварка. Результат такого комбинированного разложения по трем параметрам — $1/N_c$ киральная теория возмущений ($1/N_c$ -ChPT) [5–9], описывающая динамику нонета псевдоскалярных мезонов.

Именно $1/N_c$ -ChPT и будет использована ниже для определения масс кварков. Сначала мы покажем, что отношения масс легких кварков $m_u/m_d = x$ и $m_s/m_d = y$ в следующем за лидирующим порядке (NLO) ограничены условием $f(x, y) = 0$, где $f(x, y)$ — алгебраическая кривая третьего порядка. Ошибки, связанные с вычислением электромагнитного вклада в собственно-энергетические функции пионов и каонов придают кривой ширину. Затем мы воспользуемся данными FLAG для вычисления величины отношения $S = 2m_s/(m_u + m_d) = 27,23(10)$ [3], чтобы локализовать область допустимых значений для x и y на кубической кривой. В результате удастся получить прецизионную оценку этих величин. Затем мы находим массы кварков, сравниваем их значения с данными расчетов на решетке и с данными PDG [10], а также обсуждаем возможный эффект от учета высших NNLO-поправок на полученные результаты.

Дополнительные детали по изложенному здесь материалу могут быть найдены в [11]. Цель настоящей статьи — отразить современное состояние проблемы в том виде, в котором она была представлена автором на XXVI Международном Балдинском семинаре по физике высоких энергий.

МАССЫ КВАРКОВ В NLO-ПРИБЛИЖЕНИИ

Прежде чем мы обратимся к анализу массовых формул заряженных псевдоскаляров, отметим, что $1/N_c$ -ChPT существенно отличается от стандартной χ PT. Прежде всего это правила счета. В $1/N_c$ -ChPT три параметра разложения p , m_q и $1/N_c$ имеют порядок $p^2, m_q, 1/N_c = \mathcal{O}(\delta)$, где единый параметр δ используется для удобства счета. Естественно, что и константы эффективного лагранжиана классифицируются по степеням δ . Ниже важен следующий момент. Правила счета для константы распада пиона (в киральном пределе) в стандартном подходе, $F = \mathcal{O}(1)$, отличаются от $1/N_c$ -ChPT, где $F = \mathcal{O}(\delta^{-1/2})$. Как следствие, однопетлевая собственно-энергетическая мезонная диаграмма, вклад которой пропорционален p^2/F^2 , в χ PT имеет порядок $\mathcal{O}(\delta)$, а в $1/N_c$ -ChPT он оценивается как $\mathcal{O}(\delta^2)$, т. е. если в первом случае его следует учитывать уже в NLO-приближении, то во втором только в NNLO. Это не означает, что величина вклада однопетлевой диаграммы изменилась. Это говорит лишь о том, что в $1/N_c$ -ChPT происходит перестройка ряда кирального разложения в соответствии с появлением нового параметра разложения $1/N_c$. И только в пределе больших N_c вклад однопетлевых собственно-энергетических диаграмм подавлен.

Поскольку в дальнейшем мы ограничиваемся рассмотрением NLO-приближения, вычисления существенно упрощаются, так как в этом порядке вклад сильных взаимодействий в собственную энергию псевдо-голдстоуновских мод описывается древесной частью эффективного мезонного лагранжиана, и имеют вид [12]

$$m_{ij}^2 = \bar{\mu}_{ij}^2 \left(1 + \bar{\mu}_{ij}^2 \frac{8}{F^2} (2L_8 - L_5) \right). \quad (1)$$

Поясним обозначения. Индексы (i, j) отвечают кварковому содержанию конкретного мезонного состояния: $\pi^\pm \rightarrow (u, d)$, $K^\pm \rightarrow (u, s)$, $K^0, \bar{K}^0 \rightarrow (d, s)$. Результат лидирующего приближения $\bar{\mu}_{ij}^2$ совпадает с результатом алгебры токов [13]:

$$\bar{\mu}_{\pi^\pm}^2 = B_0(m_u + m_d), \quad \bar{\mu}_{K^\pm}^2 = B_0(m_u + m_s), \quad \bar{\mu}_{K^0}^2 = B_0(m_d + m_s), \quad (2)$$

где низкоэнергетическая константа связи B_0 прямо пропорциональна величине кваркового конденсата $B_0 = -\langle \bar{q}q \rangle_0 / F^2$, а $F \simeq (86 \pm 10)$ МэВ. Черта над символом массы означает, что в формулах (2) пренебрегается вкладом электромагнитных взаимодействий. Низкоэнергетические константы L_5 и L_8 имеют порядок $\mathcal{O}(N_c)$.

Из уравнения (1) следует, что массы $\pi^\pm$, $K^\pm$ и K^0 -мезонов содержат четыре независимых параметра: $m_d B_0$, $(2L_8 - L_5)/F^2$, m_u/m_d и m_s/m_d . Составив из этих трех выражений две дробно-линейные комбинации, можно исключить зависимость от первых двух параметров, получив при

этом ограничение на величины двух других. Действительно, рассмотрим следующие отношения:

$$\bar{\tau}_\alpha = \frac{(\alpha_P, \bar{m}_P^2)}{(\bar{\alpha}_P, \bar{m}_P^2)}, \quad \bar{\tau}_\beta = \frac{(\beta_P, \bar{m}_P^2)}{(\bar{\beta}_P, \bar{m}_P^2)}, \quad (3)$$

где $(\alpha_P, \bar{m}_P^2) = \alpha_{\pi^\pm} \bar{m}_{\pi^\pm}^2 + \alpha_{K^\pm} \bar{m}_{K^\pm}^2 + \alpha_{K^0} \bar{m}_{K^0}^2$, а величины констант α_P , $\bar{\alpha}_P$, β_P , $\bar{\beta}_P$ — произвольные действительные числа.

Из первого отношения можно выразить величину $8(2L_8 - L_5)/F^2$. То же самое можно сделать, исходя и из второго отношения. Приравняв результаты, приходим к уравнению

$$\begin{aligned} & (\alpha_P, \bar{\mu}_P^4)(\beta_P, \bar{\mu}_P^2) - (\alpha_P, \bar{\mu}_P^2)(\beta_P, \bar{\mu}_P^4) + \bar{\tau}_\alpha [(\bar{\alpha}_P, \bar{\mu}_P^2)(\beta_P, \bar{\mu}_P^4) - \\ & - (\bar{\alpha}_P, \bar{\mu}_P^4)(\beta_P, \bar{\mu}_P^2)] + \bar{\tau}_\beta [(\bar{\beta}_P, \bar{\mu}_P^4)(\alpha_P, \bar{\mu}_P^2) - (\bar{\beta}_P, \bar{\mu}_P^2)(\alpha_P, \bar{\mu}_P^4)] = \\ & = \bar{\tau}_\alpha \bar{\tau}_\beta [(\bar{\beta}_P, \bar{\mu}_P^4)(\bar{\alpha}_P, \bar{\mu}_P^2) - (\bar{\beta}_P, \bar{\mu}_P^2)(\bar{\alpha}_P, \bar{\mu}_P^4)]. \end{aligned} \quad (4)$$

Поскольку каждое из слагаемых данного уравнения $\propto \bar{\mu}_P^6$, после подстановки в него (2) зависимости от $B_0 m_d$ полностью сокращается. В результате при заданных значениях $\bar{\tau}_\alpha$ и $\bar{\tau}_\beta$ уравнение связывает отношения кварковых масс m_u/m_d и m_s/m_d .

Замечательно, что вид кривой (4) не зависит от выбора функций $\bar{\tau}_\alpha$ и $\bar{\tau}_\beta$. Это становится очевидным после перехода к новым переменным:

$$X_W = \frac{\bar{m}_{K^+}^2 - \bar{m}_{K^0}^2 + \bar{m}_{\pi^+}^2}{\bar{m}_{K^0}^2 - \bar{m}_{K^+}^2 + \bar{m}_{\pi^+}^2}, \quad Y_W = \frac{\bar{m}_{K^+}^2 + \bar{m}_{K^0}^2 - \bar{m}_{\pi^+}^2}{\bar{m}_{K^0}^2 - \bar{m}_{K^+}^2 + \bar{m}_{\pi^+}^2}, \quad (5)$$

которые в лидирующем приближении $1/N_c$ разложения совпадают с отношениями кварковых масс:

$$X_W = \frac{m_u}{m_d} [1 + \mathcal{O}(1/N_c)], \quad Y_W = \frac{m_s}{m_d} [1 + \mathcal{O}(1/N_c)], \quad (6)$$

и в которых $\bar{\tau}_\alpha$ принимает вид

$$\bar{\tau}_\alpha = \frac{(\alpha_{K^\pm} + \alpha_{K^0})Y_W + (\alpha_{K^\pm} + \alpha_{\pi^\pm})X_W + \alpha_{K^0} + \alpha_{\pi^\pm}}{(\bar{\alpha}_{K^\pm} + \bar{\alpha}_{K^0})Y_W + (\bar{\alpha}_{K^\pm} + \bar{\alpha}_{\pi^\pm})X_W + \bar{\alpha}_{K^0} + \bar{\alpha}_{\pi^\pm}}. \quad (7)$$

В результате данного преобразования вся зависимость от параметров α_P , $\bar{\alpha}_P$, β_P и $\bar{\beta}_P$ в (4) факторизуется в виде функции $\mathcal{F}$, и соотношение (4) сводится к уравнению

$$\mathcal{F}(\alpha_P, \bar{\alpha}_P, \beta_P, \bar{\beta}_P, X_W, Y_W)[(y^2 - 1)(1 - xX_W) - (x^2 - 1)(1 - yY_W)] = 0. \quad (8)$$

При $\mathcal{F} = 0$ отношения $\bar{\tau}_\alpha$ и $\bar{\tau}_\beta$ не являются независимыми. В остальных случаях $\mathcal{F} \neq 0$, и связь переменных x и y описывается алгебраической кривой третьего порядка:

$$(y^2 - 1)(1 - xX_W) = (x^2 - 1)(1 - yY_W). \quad (9)$$

Особенность переменных (5) состоит в том, что они принадлежат кривой, заданной уравнением (9), т. е. пара $(x = X_W, y = Y_W)$ является его решением.

Феноменологические значения масс псевдоскаляров m_P помимо КХД вклада $\overline{m}_P$ содержат электромагнитный вклад, без учета которого невозможно связать параметры X_W и Y_W с экспериментом.

Напомним, что в лидирующем порядке (2) это можно сделать, воспользовавшись результатом алгебры токов и РСАС, а именно теоремой Дашена [14], согласно которой электромагнитные взаимодействия дают одинаковый вклад в массы заряженных пионов $m_{\pi^\pm}^2 = \overline{\mu}_{\pi^\pm}^2 + \Delta_{\text{ем}}^2$ и каонов $m_{K^\pm}^2 = \overline{\mu}_{K^\pm}^2 + \Delta_{\text{ем}}^2$ и никак не влияют на собственную энергию нейтральных состояний. При этом, с точностью до поправок порядка $(m_d - m_u)^2$, величина $\Delta_{\text{ем}}^2 = m_{\pi^\pm}^2 - m_{\pi^0}^2$. Тогда получаем [15]

$$\begin{aligned} X_W^{\text{LO}} &= \frac{\overline{\mu}_{K^+}^2 - \overline{\mu}_{K^0}^2 + \overline{\mu}_{\pi^+}^2}{\overline{\mu}_{K^0}^2 - \overline{\mu}_{K^+}^2 + \overline{\mu}_{\pi^+}^2} = \frac{m_u}{m_d} = \frac{m_{K^+}^2 - m_{K^0}^2 + 2m_{\pi^0}^2 - m_{\pi^+}^2}{m_{K^0}^2 - m_{K^+}^2 + m_{\pi^+}^2} = 0,56, \\ Y_W^{\text{LO}} &= \frac{\overline{\mu}_{K^+}^2 + \overline{\mu}_{K^0}^2 - \overline{\mu}_{\pi^+}^2}{\overline{\mu}_{K^0}^2 - \overline{\mu}_{K^+}^2 + \overline{\mu}_{\pi^+}^2} = \frac{m_s}{m_d} = \frac{m_{K^+}^2 + m_{K^0}^2 - m_{\pi^+}^2}{m_{K^0}^2 - m_{K^+}^2 + m_{\pi^+}^2} = 20,18. \end{aligned} \quad (10)$$

Оценка величин X_W и Y_W в NLO-приближении связана с выходом за рамки теоремы Дашена, которая, как известно, сильно нарушается. Нарушение характеризуется параметром

$$\epsilon = \frac{(m_{K^\pm}^2 - m_{K^0}^2)_{\text{ем}}}{m_{\pi^\pm}^2 - m_{\pi^0}^2} - 1, \quad (11)$$

величина которого известна из вычислений на решетке: $\epsilon = 0,79(6)$ [2]. Зная ϵ , находим

$$\overline{m}_{K^\pm}^2 - \overline{m}_{K^0}^2 = m_{K^\pm}^2 - m_{K^0}^2 - \tilde{\Delta}_{\text{ем}}^2, \quad (12)$$

где $\tilde{\Delta}_{\text{ем}}^2 = \Delta_{\text{ем}}^2 + \epsilon(m_{\pi^\pm}^2 - m_{\pi^0}^2)$. Точность, с которой известны параметры

$$\Delta_{\text{ем}}^2 = 1,21(1) \cdot 10^{-3} \text{ ГэВ}^2, \quad \tilde{\Delta}_{\text{ем}}^2 = 2,21(8) \cdot 10^{-3} \text{ ГэВ}^2, \quad (13)$$

позволяет установить границы интервала, которому принадлежат значения отношений x и y . Соответствующая область заключена между двумя алгебраическими кривыми третьего порядка, изображенными на рис. 1.

Еще одно ограничение возникает из вычислений на КХД-решетке, в результате которых удалось получить прецизионную оценку для отношения $S = m_s/\hat{m} = 27,23(10)$, где $\hat{m} = (m_u + m_d)/2$. Неопределенности, связанные с нарушением теоремы Дашена, практически не влияют на эту величину (электромагнитные эффекты оцениваются примерно в $\simeq 0,18\%$ [16]). Именно этим объясняется высокая точность результата.

Совместное использование решеточных данных с полученным выше ограничением на отношения масс кварков позволяет выделить область

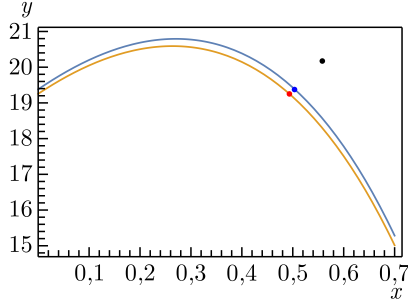


Рис. 1. Кубические кривые (9), отвечающие граничным значениям параметра $\epsilon = 0,79(6)$: верхняя кривая $\epsilon = 0,73$, нижняя кривая $\epsilon = 0,85$. На каждой из кривых отмечена точка с координатами (X_W, Y_W) . Отдельной точкой отмечен результат ($x = 0,56, y = 20,18$), полученный Вайнбергом в лидирующем приближении. По оси абсцисс отложено отношение $x = m_u/m_d$, по оси ординат — $y = m_s/m_d$

допустимых значений для переменных x и y , которая представлена на рис. 2. Отсюда следует, что

$$m_u/m_d = 0,455(8), \quad m_s/m_d = 19,81(10). \quad (14)$$

Укажем также значение $R = (m_s - \hat{m})/(m_d - m_u)$, которое соответствует сделанным выше оценкам: $R = 35,0(6)$. Оно характеризует совместный эффект от нарушения симметрий $SU(3)$ и $SU(2)$. В лидирующем приближении $R^{\text{LO}} = 44$.

Отношения кварковых масс в $\overline{\text{MS}}$ -схеме не зависят от бегущего масштаба КХД. В то же время отношение m_u/m_d зависит от масштаба квантовой электродинамики, поскольку верхние и нижние кварки имеют разные электрические заряды. Однако этот эффект проявляется только

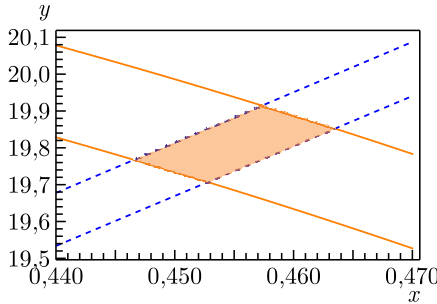


Рис. 2. Зависимость отношения $y = m_s/m_d$ от $x = m_u/m_d$ в NLO-приближении. Допустимым значениям отвечает закрашенная область, ограниченная кубическими кривыми (сплошные линии) и отношением $S = m_s/\hat{m} = 27,23(10)$ (пунктирные линии), полученным FLAG на решетке с четырьмя ароматами кварков [3]

Сравнение $\overline{\text{MS}}$ -массы кварков $m_q(\mu = 2 \text{ ГэВ})$ и их отношений, полученных в данной работе, с результатами расчетов на решетке и с последними данными PDG

Источник	m_u , МэВ	m_d , МэВ	m_s , МэВ	m_u/m_d	$m_s/\hat{m}$
Наша работа	2,14(7)	4,70(12)	93,13(2,25)	0,455(8)	27,23(10) [3]
BMW [18]	2,27(9)	4,67(9)	95,5(1,9) [19]	0,485(20)	27,53(22) [19]
RM123 [20]	2,50(17)	4,88(20)	—	0,513(30)	—
ETM [21]	2,36(24)	5,03(26)	93,6(8)	0,470(56)	26,66(32)
FLAG [3]	2,14(8)	4,70(5)	93,44(68)	0,465(24)	27,23(10)
PDG [10]	2,16(4)	4,70(4)	93,5(5)	0,462(13)	27,33 ⁺⁽¹¹⁾ ₋₍₀₉₎

во втором порядке по нарушению изоспина, что выходит за пределы точности наших расчетов.

Для определения абсолютных значений масс кварков решаем три уравнения (1) при заданном значении B_0 . Оценки B_0 на решетке в настоящее время не отличаются высокой точностью. Для наших расчетов будем использовать результат NLO-анализа $B_0(2 \text{ ГэВ}) = 2,682(36)(39) \text{ ГэВ}$ [17], общая погрешность которого относительно невелика: $\sim 2\%$. Это значение достаточно хорошо согласуется с данными FLAG [3]. Параметр $8B_0(2L_8 - L_5)/F^2$ варьируется таким образом, чтобы решение принадлежало области пересечения кубиков с интервалом S (см. рис. 2). Полученные результаты представлены в таблице. Они соответствуют стандартной $\overline{\text{MS}}$ -схеме вычитаний при энергии 2 ГэВ.

Как может повлиять на представленные результаты учет поправок более высокого порядка? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим соотношения (2), где теперь мы ожидаем, что квадрат массы $\overline{m}_P^2$ получает дополнительный NNLO-вклад:

$$\overline{m}_P^2 \rightarrow Z_P \overline{M}_P^2 = \overline{m}_P^2 + \delta \overline{m}_P^2. \quad (15)$$

Здесь $\delta \overline{m}_P^2 = O(\delta^3)$ — NNLO-вклад, а фактор Z_P обусловлен перенормировкой однопетлевых диаграмм.

Данное выражение можно записать в виде

$$\overline{M}_{ij}^2 = \overline{m}_{ij}^2 (1 + c_{ij}), \quad (16)$$

где $c_{ij} = O(m_q^2)$ включает перенормировку однопетлевых диаграмм за счет Z_P . Формула (16) справедлива до членов NNLO включительно.

Покажем, что NNLO-вклад не влияет на форму кубической кривой. Действительно, коэффициенты (3) теперь строятся на основе физических масс $\overline{M}_P^2$, но результат

$$\overline{R}_\alpha = \frac{(\alpha_P, \overline{M}_P^2)}{(\overline{\alpha}_P, \overline{M}_P^2)} = \frac{(\alpha'_P, \overline{m}_P^2)}{(\overline{\alpha}'_P, \overline{m}_P^2)} \quad (17)$$

отличается от (3) только значениями коэффициентов $\alpha'_P = (1 + c_P)\alpha_P$ и $\bar{\alpha}'_P = (1 + c_P)\bar{\alpha}_P$. Как мы уже установили, величина этих коэффициентов не влияет на уравнение кубической кривой. Таким образом, после учета NNLO-поправок x и y по-прежнему принадлежат кривой (9).

Финансирование. Данная работа финансировалась за счет средств бюджета Объединенного института ядерных исследований. Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

Конфликт интересов. Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gasser J., Leutwyler H. Quark Masses // Phys. Rep. 1982. V. 87, No. 3. P. 77–169.
2. Aoki Y. et al. (Flavour Lattice Averaging Group (FLAG)). FLAG Review 2021 // Eur. Phys. J. C. 2022. V. 82, No. 869. P. 1–296.
3. Aoki Y. et al. (Flavour Lattice Averaging Group (FLAG)). FLAG Review 2024. arXiv:2411.04268 [hep-lat]. 2025.
4. Gasser J., Leutwyler H. Chiral Perturbation Theory: Expansions in the Mass of the Strange Quark // Nucl. Phys. B. 1985. V. 250, No. 1–4. P. 465–516.
5. Leutwyler H. Bounds on the Light Quark Masses // Phys. Lett. B. 1996. V. 374, No. 1–3. P. 163–168.
6. Leutwyler H. The Ratios of the Light Quark Masses // Ibid. V. 378, No. 1–4. P. 313–318.
7. Leutwyler H. On the $1/N$ -Expansion in Chiral Perturbation Theory // Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.). 1998. V. 64, No. 1–3. P. 223–231.
8. Herrera-Siklody R., Latorre J.I., Pascual P., Taron J. Chiral Effective Lagrangian in the Large- N_c Limit: The Nonet Case // Nucl. Phys. B. 1997. V. 497, No. 1–2. P. 345–386.
9. Kaiser R., Leutwyler H. Large N_c in Chiral Perturbation Theory // Eur. Phys. J. C. 2000. V. 17, No. 1–3. P. 623–649.
10. Navas S. et al. (Particle Data Group). Review of Particle Physics // Phys. Rev. D. 2024. V. 110, No. 3. P. 030001.
11. Osipov A. A. Ratios of the Light Quark Masses: Cubic Curve versus Ellipse // Phys. Rev. D. 2024. V. 110. P. 014044.
12. Goity J. L., Bernstein A. M., Holstein B. R. Decay $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ to Next to Leading Order in Chiral Perturbation Theory // Phys. Rev. D. 2002. V. 66. P. 076014.
13. Gell-Mann M., Oakes R. J., Renner B. Behavior of Current Divergences under $SU(3) \times SU(3)$ // Phys. Rev. 1968. V. 175, No. 5. P. 2195–2199.
14. Dashen R. Chiral $SU(3) \times SU(3)$ as a Symmetry of the Strong Interactions // Phys. Rev. 1969. V. 183. P. 1245–1260.
15. Weinberg S. The Problem of Mass // Trans. New York Acad. Sci. 1977. V. 38. P. 185–201.
16. Dashen R. Chiral B - and D -Meson Leptonic Decay Constants from Four-Flavor Lattice QCD // Phys. Rev. D. 2018. V. 98. P. 074512.

17. *Borsanyi S. et al. SU(2) Chiral Perturbation Theory Low-Energy Constants from 2 + 1 Flavor Staggered Lattice Simulations // Phys. Rev. D. 2013. V. 88. P. 014513.*
18. *Fodor Z. et al. (BMW Collab.). Up and Down Quark Masses and Corrections to Dashen's Theorem from Lattice QCD and Quenched QED // Phys. Rev. Lett. 2016. V. 117, No. 8. P. 082001.*
19. *Dürr S., Fodor Z. et al. (BMW Collab.). Lattice QCD at the Physical Point: Light Quark Masses // Phys. Lett. B. 2011. V. 701, No. 2. P. 265–268.*
20. *Giusti D. et al. (RM123 Collab.). Leading Isospin-Breaking Corrections to Pion, Kaon and Charmed-Meson Masses with Twisted-Mass Fermions // Phys. Rev. D. 2017. V. 95, No. 11. P. 114504.*
21. *Carrasco N. et al. (ETM Collab.). Up, Down, Strange and Charm Quark Masses with $N_f = 2 + 1 + 1$ Twisted Mass Lattice QCD // Nucl. Phys. B. 2014. V. 887. P. 19–68.*