

ОБНОВЛЕННЫЙ КХД-АНАЛИЗ ПРАВИЛА СУММ БЬЁРКЕНА НА ОСНОВЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Д. А. Волкова^{1,2,*}, *Н. А. Грамотков*^{1,3,**},
А. В. Котиков^{1,***}, *О. В. Теряев*^{1,****},
О. П. Соловцова^{1,4,*****}

¹ Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия

² Государственный университет «Дубна», Дубна, Россия

³ Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

⁴ Гомельский государственный технический университет, Гомель, Беларусь

Представлен новый анализ правила сумм Бьёркена для разности первых моментов спин-зависимых структурных функций q_1 протона и нейтрона в области значений квадрата переданного импульса $Q^2 < 1 \text{ ГэВ}^2$. Рассмотрение основано на аналитической теории возмущений, свободной от нефизических сингулярностей, и оригинальном методе «сшивания» областей с большими и малыми областями Q^2 . Зафиксировав КХД-параметры при больших Q^2 , переходим в область малых Q^2 , используя при этом правило сумм Герасимова–Дрелла–Хирна как граничное условие, тем самым избегая проблемы расходимости при $Q^2 \rightarrow 0$ представления высших twists в виде разложения по обратным степеням $1/Q^2$. Исследована стабильность наших теоретических предсказаний и согласие между теоретическим описанием и новыми экспериментальными данными лаборатории Джефферсона по спиновой структуре нуклона при значениях Q^2 , очень близких к нулю.

We present an updated analysis of the Bjorken sum rules for the difference between the first moments of the spin-dependent structure functions q_1 of the proton and neutron in the region of small of the momentum transfer, $Q^2 < 1 \text{ GeV}^2$. Our theoretical description theory is based on the singularity-free analytic perturbation theory and an original method for matching regions with large and low Q^2 scales. Having fixed the QCD parameters at large Q^2 , we move to the region of small Q^2 , using the Gerasimov–Drell–Hearn sum rule as a boundary condition, thereby avoiding the problem of divergence at $Q^2 \rightarrow 0$ of a higher-twist representation as an expansion in inverse powers of $1/Q^2$. We investigate the stability of our theoretical predictions and the agreement between the theoretical description and the new

* E-mail: dvolkova@theor.jinr.ru

** E-mail: gramotkov@theor.jinr.ru

*** E-mail: kotikov@theor.jinr.ru

**** E-mail: teryaev@theor.jinr.ru

***** E-mail: olsol@theor.jinr.ru

experimental data from the Jefferson Laboratory on the nucleon spin structure at values of Q^2 very close to zero.

PACS: 13.85.Qk

ВВЕДЕНИЕ

Глубоконеупругое рассеяние лептонов на нуклонах является одним из ключевых процессов при изучении внутренней структуры нуклонов. Сечения этого процесса описываются структурными функциями, интегралы от различных комбинаций которых образуют правила сумм. Центральное место при исследовании спиновой структуры нуклона занимает поляризованное правило сумм Бьёркена [1, 2]. Накопленный к настоящему времени обширный экспериментальный материал по первым моментам структурных функций протона и нейтрона, а также по их разности — правилу сумм Бьёркена [3–16] открывает возможность проверки теоретических предсказаний и получения более точной информации, в частности о высших твистах (НТ), вклад которых становится все более заметным с уменьшением квадрата переданного импульса Q^2 .

Анализ в рамках КХД экспериментальных данных, полученных в лаборатории Джефферсона (JLab) в рекордно низкой области $0,01 < Q^2 < 1$ ГэВ² [16], встречает серьезные трудности, связанные с применением обычной теории возмущений (ТВ (РТ)), поскольку пертурбативный инвариантный заряд $\alpha_s(Q^2)$ не является более малой величиной, что требует учета все большего числа членов разложения по $\alpha_s(Q^2)$, и при столь малых Q^2 у пертурбативного заряда $\alpha_s(Q^2)$ проявляются нефизические особенности (см., например, [17]). Другая трудность обусловлена тем, что использование представления для вклада НТ в виде разложения по обратным степеням $1/Q^2$ [18, 19] фактически требует учета бесконечного числа слагаемых.

Для того, чтобы обойти эту проблему, связанную с применением обычной ТВ при малых Q^2 , можно использовать аналитический подход в КХД, называемый аналитической теорией возмущений (АТВ (АРТ)) [20, 21]. АТВ при анализе экспериментальных данных по правилу сумм Бьёркена применялась в целом ряде работ, включая [22–32]. В более ранних работах [22–24] было показано, что использование АТВ с учетом НТ позволяет достичь хорошего описания низкоэнергетических данных JLab вплоть до $Q_{\min} \sim \Lambda_{\text{QCD}} \sim 300$ МэВ. В последующих работах (см. недавний обзор [33]) было показано, что улучшить теоретическое описание вплоть до нулевых передач импульса удастся, если воспользоваться выражением для вкладов НТ в виде «массивного» представления [36] и привлечь правило сумм Герасимова–Дрелла–Хирна [34, 35].

В настоящей работе применяется АТВ в ее реализации в [25]. По приведенной в этой работе функции $\Gamma_1(Q^2)$ мы строим функцию $I_1(Q^2)$ (см. формулу (8) ниже), непосредственно связанную с наблюдаемым сечением. Далее, используя метод «сшивки» [37] и правило сумм

Герасимова–Дрелла–Хирна в качестве граничного условия, мы получаем единое описание $I_1(Q^2)$ во всей области Q^2 .

1. КРАТКИЙ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ОБЗОР

Правило сумм Бьёркена определяется интегралом от разности структурных функций $g_1(x, Q^2)$ протона g_1^p и нейтрона g_1^n при фиксированном значении квадрата передаваемого импульса Q^2 и в пределе $Q^2 \rightarrow \infty$ имеет вид

$$\Gamma_1^{p-n}(Q^2)|_{Q^2 \rightarrow \infty} = \int_0^1 [g_1^p(x, Q^2) - g_1^n(x, Q^2)] dx = \frac{g_A}{6}, \quad (1)$$

где g_A — аксиальная константа связи, измеренная в β -распаде нейтрона.

Выражение (1) обобщается на конечные значения Q^2 и в соответствии с операторным разложением (ОРЕ) [18] представляется как

$$\Gamma_1^{p-n}(Q^2) = \frac{g_A}{6} [1 - D_{BS}(Q^2)] + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\mu_{2i}(Q^2)}{Q^{2i-2}}, \quad (2)$$

где $D_{BS}(Q^2)$ — пертурбативная поправка; μ_{2i}/Q^{2i-2} — вклады НТ.

Пертурбативная часть $D_{BS}(Q^2)$ в рамках ТВ имеет вид разложения по $\alpha_s(Q^2)$ и на известном четырехпетлевом уровне (N^3LO) в безмассовом случае записывается следующим образом:

$$D_{BS}(\alpha_s) = c_1 \alpha_s + c_2 \alpha_s^2 + c_3 \alpha_s^3 + c_4 \alpha_s^4, \quad (3)$$

где коэффициенты разложения c_k в $(\overline{MS})$ -схеме для трех активных ароматов, $n_f = 3$, имеют значения: $c_1 = 1/\pi = 0,31831$, $c_2 = 0,36307$, $c_3 = 0,65197$ и $c_4 = 1,8042$ [38].

В рамках АТВ ряд по α_s в (3) заменяется разложениями по аналитическим функциям связи:

$$D_{BS}^{PT} = \sum_{k \leq 4} c_k \alpha_s^k \Rightarrow D_{BS}^{APT} = \sum_{k \leq 4} c_k \mathcal{A}_k$$

и имеет вид

$$D_{BS}^{APT}(Q^2) = c_1 \mathcal{A}^{(1)}(Q^2) + c_2 \mathcal{A}^{(2)}(Q^2) + c_3 \mathcal{A}^{(3)}(Q^2) + c_4 \mathcal{A}^{(4)}(Q^2), \quad (4)$$

где коэффициенты c_1 , c_2 , c_3 и c_4 те же, что и в (3), а функции $\mathcal{A}^{(k)}(Q^2)$ определяются через представление Челлена–Лемана как

$$\mathcal{A}^{(k)}(Q^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\sigma \frac{\varrho_k(\sigma)}{\sigma + Q^2}, \quad (5)$$

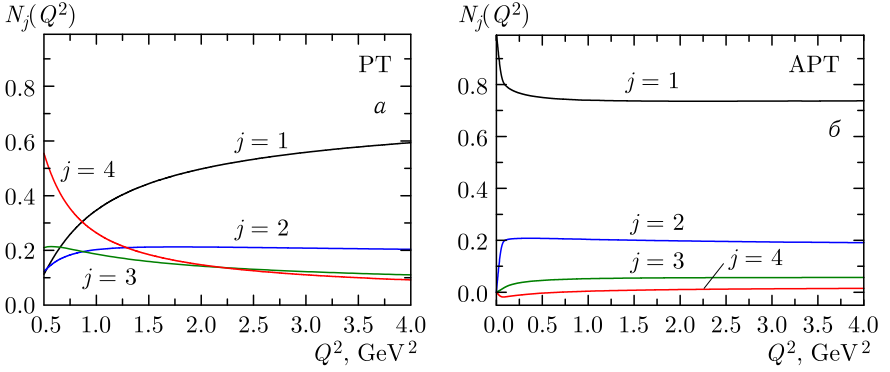


Рис. 1. Относительные вклады в ТВ (PT) (а) и АТВ (APT) (б) (выражения (3) и (4) соответственно) на четырехпетлевом уровне ($N^3\text{LO}$)

где $\varrho_k(\sigma) = \text{Im} [a_{\text{PT}}^k(-\sigma - i\epsilon)]$. Аналитический инвариантный заряд $\alpha_{\text{APT}}(Q^2) = \pi \mathcal{A}^{(1)}(Q^2)$ соответствует случаю $k = 1$.

Отличие в свойствах сходимости разложений ТВ и АТВ (выражения (3) и (4) соответственно) демонстрируется на рис. 1, на котором можно видеть относительный вклад $N_j(Q^2)$ слагаемых в разложениях ТВ и АТВ:

$$N_j^{\text{PT}}(Q^2) = c_j \alpha_s^j(Q^2) / D_{\text{BS}}^{\text{PT}}(Q^2) \text{ и } N_j^{\text{APT}}(Q^2) = c_j \mathcal{A}^{(j)}(Q^2) / D_{\text{BS}}^{\text{APT}}(Q^2). \quad (6)$$

Как видно из рис. 1, при $Q^2 < 1 \text{ ГэВ}^2$ в рамках ТВ доминирует вклад от четвертого слагаемого, тогда как в АТВ определяющим является вклад от первого слагаемого.

Возвращаясь к (2), отметим, что выражение для НТ есть разложение по $1/Q^{2j}$ и при малых значениях Q^2 стремится к бесконечности. Чтобы избежать этой проблемы, мы воспользуемся так называемым массивным представлением в форме, которая суммирует часть вкладов НТ [36]:

$$\sum_{i=2}^{\infty} \frac{\mu_{2i}(Q^2)}{Q^{2i-2}} \rightarrow \frac{\hat{\mu}_4}{Q^2 + m_{\text{HT}}^2}.$$

Тогда выражение (2) представляется в виде

$$\Gamma_1^{p-n}(Q^2) = \frac{g_A}{6} [1 - D_{\text{BS}}(Q^2)] + \frac{\hat{\mu}_4}{Q^2 + m_{\text{HT}}^2}. \quad (7)$$

Выражение (7) ранее использовалось в работах [39] и [25] при фитировании данных Jlab в низкоэнергетической области. Далее мы будем использовать значения $\hat{\mu}_4$, m_{HT}^2 , полученные в этих работах: $\hat{\mu}_4 = -0,082 \pm 0,002$ и $m_{\text{HT}} = 0,439 \pm 0,012$.

2. МЕТОД СШИВКИ

Для обеспечения гладкого продолжения $\Gamma_1^{p-n}(Q^2)$ в непertурбативную область $Q^2 < 1 \text{ ГэВ}^2$ мы следуем подходу, предложенному в [37], и рассматриваем величину $I_1(Q^2)$:

$$I_1(Q^2) \equiv \frac{2M^2}{Q^2} \Gamma_1(Q^2) = \frac{2M^2}{Q^2} \int_0^1 g_1(x, Q^2) dx, \quad (8)$$

где M — масса нуклона. Согласно правилу сумм Герасимова–Дрелла–Хирна [34], значение $I_1(Q^2)$ при $Q^2 = 0$ равно

$$I_1(0) = -\frac{\kappa_N^2}{4}, \quad (9)$$

где κ_N — аномальный магнитный момент нуклона. Тогда, учитывая (9), для разности соответствующих правилу сумм Бёркена моментов, получаем, что при $Q^2 \rightarrow 0$

$$I_{\text{GDH}}^{p-n} = \lim_{Q^2 \rightarrow 0} [I_1^p(Q^2) - I_1^n(Q^2)] = -\frac{1}{4} (\kappa_p^2 - \kappa_n^2) \simeq 0,112, \quad (10)$$

где $\kappa_p = 1,793$ и $\kappa_n = -1,913$. Если $Q^2 \rightarrow \infty$, то Q^2 -эволюция интеграла $I_1^{p-n}(Q^2) = I_1^p(Q^2) - I_1^n(Q^2)$ выглядит следующим образом:

$$\lim_{Q^2 \rightarrow \infty} I_1^{p-n}(Q^2) = \frac{M^2}{Q^2} \frac{g_A}{3}. \quad (11)$$

Поскольку $I_1^{p-n}(Q^2)$ имеет одинаковый (положительный) знак при больших и малых Q^2 , можно ожидать ее гладкую интерполяцию между большими Q^2 и $Q^2 = 0$. Следуя [37], мы разлагаем $I_1^{p-n}(Q^2)$ по прямым степеням в некоторой точке Q_0 , определяя выражение при малых Q^2 как

$$I_1^{p-n}(Q^2) = \theta(Q^2 < Q_0^2) \sum_{l=0}^k \frac{1}{l!} \frac{\partial^l I_1^{p-n}(Q^2)}{(\partial Q^2)^l} \Big|_{Q=Q_0} (Q^2 - Q_0^2)^l + \\ + \theta(Q^2 > Q_0^2) I_1^{p-n}(Q^2). \quad (12)$$

Здесь k — число непрерывных производных, которое оказывается свободным параметром модели наряду со значением точки сшивки Q_0 , подбираемой таким образом, чтобы выполнялось условие

$$I_1^{p-n}(0) = I_{\text{GDH}}^{p-n}. \quad (13)$$

На рис. 2 показано поведение $I_1^{p-n}(Q^2)$, получаемое при использовании выражений (7) и (12) при разном числе k слагаемых в сумме (12) — числа у штриховых кривых. Сплошная линия — это поведение $I_1^{p-n}(Q^2)$

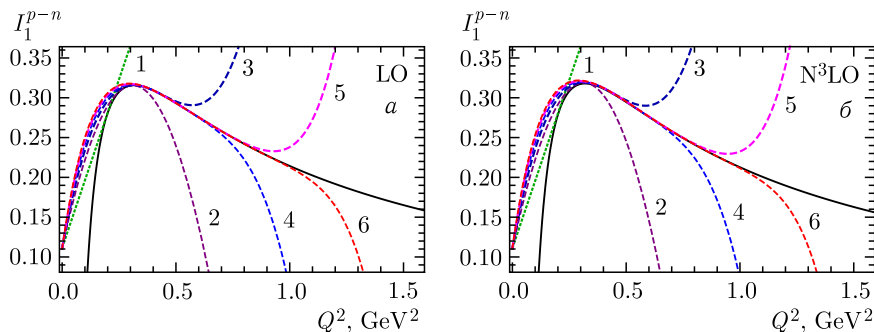


Рис. 2. Поведение $I_1^{p-n}(Q^2)$ в лидирующем порядке (а) и $N^3\text{LO}$ (б) при различном числе k слагаемых в сумме (12) — числа у штриховых кривых

Точка сшивки Q_0^2 (в ГэВ^2) для разных порядков разложения в АТВ (LO, NLO, $N^2\text{LO}$ и $N^3\text{LO}$) и в зависимости от числа k членов ряда в сумме (12)

k	LO	NLO	$N^2\text{LO}$	$N^3\text{LO}$
1	0,199	0,196	0,203	0,205
2	0,284	0,280	0,292	0,292
3	0,369	0,363	0,378	0,379
4	0,456	0,448	0,476	0,467
5	0,542	0,543	0,554	0,555
6	0,629	0,623	0,644	0,642

без сшивки: при Q^2 , близких к нулю, поведение сплошной кривой не согласуется с условием (13). Как видно из рисунка, все штриховые линии при $Q^2 = 0$ исходят из нужного значения (10), но далее, в зависимости от числа слагаемых k в сумме (12), ведут себя по-разному. Следует отметить, что поведение $I_1^{p-n}(Q^2)$ меняется незначительно с изменением порядка пертурбативного разложения, что типично при использовании АТВ. Точке сшивки Q_0^2 соответствует значение, при котором штриховая кривая справа от максимума $I_1^{p-n}(Q^2)$ отходит от сплошной линии. Как видно из этого рисунка, Q_0^2 сдвигается с ростом k в область больших значений — более детально это демонстрирует таблица.

В таблице приведены численные значения точки сшивки Q_0^2 (в ГэВ^2) в зависимости от используемого порядка разложения для пертурбативной части в рамках АТВ (LO, NLO, $N^2\text{LO}$ и $N^3\text{LO}$) и от числа слагаемых k в сумме (12). Как видно из этой таблицы, точка Q_0^2 незначительно варьируется, слегка увеличиваясь от порядка к порядку пертурбативного разложения. В то же время при увеличении числа слагаемых k в разложении (12) наблюдается значительное смещение в сторону больших значений Q_0^2 .

Наше детальное исследование зависимости значения Q_0^2 от k показало, что, поскольку мы интересуемся областью малых Q^2 , необходимо соблюдать условие $Q_0^2 < 1 \text{ ГэВ}^2$ и оптимальным выбором является $Q_0^2 \simeq 0,6 \text{ ГэВ}^2$, соответствующее $k = 6$. Такой выбор хорошо согласуется с результатами фитирования $\Gamma_1^{p-n}(Q^2)$, приведенными в работе [32], в которой было получено изменение (смена режима) параметров фитирования в области малых $Q^2 < 0,6 \text{ ГэВ}^2$ (см. таблицу в этой работе) по сравнению с областью $Q^2 \leq 5 \text{ ГэВ}^2$.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ФИТИРОВАНИЯ

Результат фитирования экспериментальных данных JLab для $I_1^{p-n}(Q^2)$ в области $Q^2 \leq 5 \text{ ГэВ}^2$ демонстрируется на рис. 3, на котором пунктирная линия соответствует АТВ (АПТ) без сшивки, выполненной согласно (7) и (12). Для сравнения приведено поведение $I_1^{p-n}(Q^2)$, получаемое при использовании обычной ТВ (РТ): сплошная линия — это результат со сшивкой, а штрихпунктирная — без сшивки. Рис. 3 демонстрирует, что в области нескольких ГэВ^2 все теоретические кривые хорошо согласуются с экспериментальными данными, по которым и фиксировались параметры. Как видно из этого рисунка, в области ниже $Q^2 < 2 \text{ ГэВ}^2$ поведение кривых существенно различается — это более детально демонстрирует рис. 4.

Рассмотрим область малых $Q^2 < 2 \text{ ГэВ}^2$ более подробно, используя логарифмический масштаб. Получаемое поведение АТВ и ТВ кри-

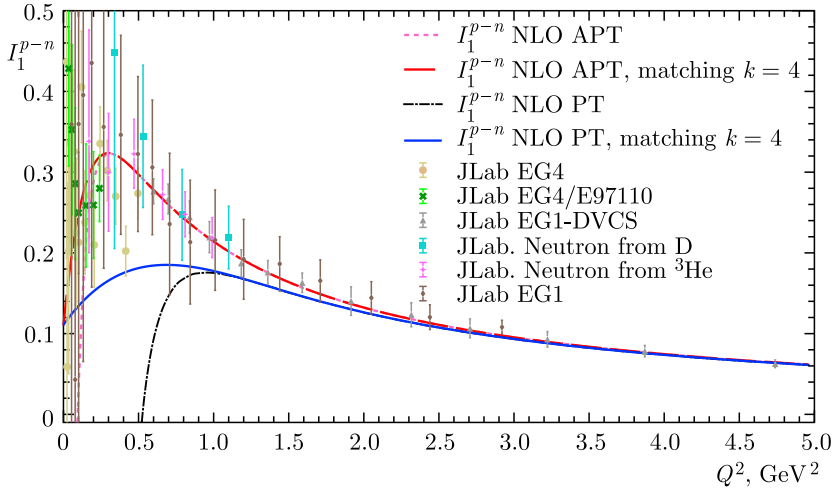


Рис. 3. Результат фитирования $I_1^{p-n}(Q^2)$ в области $Q^2 \leq 5 \text{ ГэВ}^2$. Сплошная линия соответствует ТВ со сшивкой, штрихпунктирная — ТВ без сшивки, штриховая — АТВ со сшивкой, а пунктирная — АТВ без сшивки

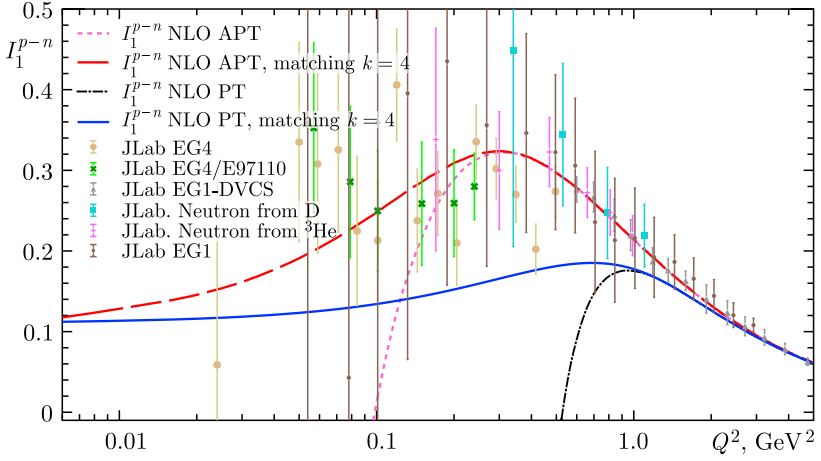


Рис. 4. Поведение $I_1^{p-n}(Q^2)$ в области малых передаваемых импульсов. Сплошная линия соответствует ТВ со сшивкой, штрихпунктирная — ТВ без сшивки, штриховая — АТВ со сшивкой, пунктирная — АТВ без сшивки

вых представлено на рис. 4. Как видно из этого рисунка, в области $Q^2 < 1 \text{ ГэВ}^2$ поведение АТВ со сшивкой и ТВ со сшивкой различно. Следует отметить, что АТВ ухватывает максимум, на который указывают экспериментальные данные, а ТВ — нет. Рис. 4 также демонстрирует, что результаты АТВ и ТВ с учетом высшего твиста, но без сшивки не согласуются с экспериментальными данными и правилом сумм Герасимова–Дрелла–Хирна (см. пунктирную и штрихпунктирную линии соответственно).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе мы продолжили изучение правила сумм Бьёркена в области значений квадрата переданного импульса $Q^2 < 1 \text{ ГэВ}^2$. Построен теоретический подход, основанный на аналитической теории возмущений (АТВ) и аналитическом методе сшивки областей больших и малых Q^2 с учетом правила сумм Герасимова–Дрелла–Хирна. После того, как в модели были зафиксированы параметры при больших Q^2 , мы перешли к описанию экспериментальных данных JLab при малых $Q^2 < 1 \text{ ГэВ}^2$, впервые используя при этом функцию $I_1^{p-n}(Q^2)$, предварительно исследовав стабильность ее поведения в зависимости от выбора точки сшивки Q_0^2 .

Показано, что наше теоретическое описание для правила сумм Бьёркена хорошо согласуется с данными JLab до рекордно низких значений Q^2 . Однако следует отметить, что было бы крайне желательно иметь

более точные экспериментальные данные в этой области, что позволило бы отдать предпочтение той или иной теоретической модели.

Финансирование. Данная работа финансировалась за счет средств бюджета Объединенного института ядерных исследований в рамках гранта сотрудничества между Объединенным институтом ядерных исследований и учреждениями Республики Беларусь в 2025 г.

Конфликт интересов. Авторы статьи заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bjorken J.D.* Applications of the Chiral $U(6) \otimes U(6)$ Algebra of Current Densities // *Phys. Rev.* 1966. V. 148. P. 1467.
2. *Bjorken J.D.* Inelastic Scattering of Polarized Leptons from Polarized Nucleons // *Phys. Rev.* 1970. V. 1. P. 376.
3. *Ashman J. et al.* A Measurement of the Spin Asymmetry and Determination of the Structure Function g_1 in Deep Inelastic Muon-Proton Scattering // *Phys. Lett. B.* 1988. V. 206. P. 364.
4. *Adeva B. et al.* Spin Asymmetries $A(1)$ and Structure Functions g_1 of the Proton and the Deuteron from Polarized High-Energy Muon Scattering // *Phys. Rev. D.* 1988. V. 58. P. 112001.
5. *Abe K. et al.* Measurements of the Proton and Deuteron Spin Structure Functions g_1 and g_2 // *Ibid.* P. 112003.
6. *Abe K. et al.* Measurements of $R = \sigma_L/\sigma_T$ for $0.03 < x < 0.1$ and Fit to World Data // *Phys. Lett. B.* 1999. V. 452. P. 1948.
7. *Deur A. et al.* Experimental Determination of the Evolution of the Bjorken Integral at Low Q^2 // *Phys. Rev. Lett.* 2004. V. 93. P. 212001.
8. *Deur A. et al.* Experimental Determination of the Effective Strong Coupling Constant // *Phys. Lett. B.* 2007. V. 650. P. 244.
9. *Deur A. et al.* Determination of the Effective Strong Coupling Constant $\alpha_{s,g_1}(Q^2)$ from CLAS Spin Structure Function Data // *Phys. Lett. B.* 2008. V. 665, Iss. 5. P. 349–351.
10. *Deur A. et al.* Experimental Study of Isovector Spin Sum Rules // *Phys. Rev. D.* 2008. V. 78. P. 032001.
11. *Prok Y. et al. (CLAS Collab.).* Moments of the Spin Structure Functions g_1^p and g_1^d for $0.05 < Q^2 < 3.0 \text{ GeV}^2$ // *Phys. Lett. B.* 2009. V. 672. P. 12.
12. *Deur A. et al.* High Precision Determination of the Q^2 Evolution of the Bjorken Sum // *Phys. Rev. D.* 2014. V. 90. P. 012009.
13. *Deur A. et al.* Experimental Study of the Behavior of the Bjorken Sum at Very Low Q^2 // *Phys. Rev. D.* 2022. V. 825. P. 136878.
14. *Airapetian A. et al.* Precise Determination of the Spin Structure Function $g(1)$ of the Proton, Deuteron and Neutron // *Phys. Rev. D.* 2007. V. 75. P. 012007.
15. *Adolph C. et al.* Final COMPASS Results on the Deuteron Spin-Dependent Structure Function and the Bjorken Sum Rule // *Phys. Lett. B.* 2017. V. 769. P. 34.

16. *Deur A. et al. (CLAS Collab.).* Measurement of the Nucleon Spin Structure Functions for $0.01 < Q^2 < 1 \text{ GeV}^2$ Using CLAS // *Phys. Rev. C.* 2025. V. 111. P. 035202.
17. *Milton K. A., Solovtsova O. P.* Analytic Perturbation Theory: A New Approach to the Analytic Continuation of the Strong Coupling Constant α_s into the Timelike Region // *Phys. Rev. D.* 1998. V. 57. P. 5402.
18. *Shuryak E. V., Vainshtein A. I.* Theory of Power Corrections to Deep Inelastic Scattering in Quantum Chromodynamics. 2. Q^4 Effects: Polarized Target // *Nucl. Phys. B.* 1982. V. 201. P. 141.
19. *Balitsky I. I., Braun V. M., Kolesnichenko A. V.* Power Corrections $1/Q^2$ to Parton Sum Rules for Deep Inelastic Scattering from Polarized Targets // *Phys. Lett. B.* 1990. V. 242. P. 245.
20. *Shirkov D. V., Solovtsov I. L.* Analytic Model for the QCD Running Coupling with Universal $\alpha_s(0)$ Value // *Phys. Rev. Lett.* 1997. V. 79. P. 1209.
21. *Milton K. A., Solovtsov I. L.* Analytic Perturbation Theory in QCD and Schwinger's Connection between the β Function and the Spectral Density // *Phys. Rev.* 1997. V. 55. P. 5295.
22. *Pasechnik R. S., Shirkov D. V., Teryaev O. V., Solovtsova O. P., Khandramai V. L.* Nucleon Spin Structure and pQCD Frontier on the Move // *Phys. Rev. D.* 2010. V. 81. P. 016010.
23. *Pasechnik R. S., Soffer Ja., Teryaev O. V., Solovtsova O. P., Khandramai V. L.* Nucleon Spin Structure at Low Momentum Transfers // *Phys. Rev. D.* 2010. V. 82. P. 076007.
24. *Khandramai V. L., Pasechnik R. S., Shirkov D. V., Solovtsova O. P., Teryaev O. V.* Four-Loop QCD Analysis of the Bjorken Sum Rule // *Phys. Lett. B.* 2012. V. 706. P. 340.
25. *Kotikov A. V., Zemlyakov I. A.* About Fractional Analytic QCD beyond Leading Order // *Qazaq J. Phys.* 2022. V. 1. P. 1; arXiv:2207.01330 [hep-ph].
26. *Kotikov A. V., Zemlyakov I. A.* Fractional Analytic QCD beyond Leading Order // *J. Phys. G.* 2023. V. 50. P. 015001.
27. *Kotikov A. V., Zemlyakov I. A.* Fractional Analytic QCD beyond Leading Order in the Timelike Region // *Phys. Rev. D.* 2023. V. 107. P. 094034.
28. *Gabdrakhmanov I. R. et al.* Bjorken Sum Rule with Analytic Coupling at Low Q^2 Values // *Pis'ma ZhETF.* 2023. V. 118. P. 491.
29. *Gabdrakhmanov I. R., Gramotkov N. A., Kotikov A. V., Teryaev O. V., Volkova D. A., Zemlyakov I. A.* On Bjorken Sum Rule: Heavy Quarks and Analytic QCD // *Phys. Part. Nucl. Lett.* 2025. V. 22. P. 146.
30. *Gabdrakhmanov I. R., Gramotkov N. A., Kotikov A. V., Teryaev O. V., Volkova D. A., Zemlyakov I. A.* Bjorken Sum Rule with Analytic Coupling // *Intern. J. Mod. Phys. A.* 2025. V. 40. P. 2450175.
31. *Gabdrakhmanov I. R., Gramotkov N. A., Kotikov A. V., Teryaev O. V., Volkova D. A., Zemlyakov I. A.* Fractional Analytic QCD: The Recent Results // *Particles.* 2025. V. 8. P. 29.
32. *Gabdrakhmanov I. R., Gramotkov N. A., Kotikov A. V., Teryaev O. V., Volkova D. A., Zemlyakov I. A.* QCD with Analytic Coupling: Recent Results. arXiv:2509.22252 [hep-ph]. 2025.
33. *Deur A. et al.* Experimental Study of the Behavior of the Bjorken Sum at Very Low Q^2 // *Phys. Lett. B.* 2022. V. 825. P. 136878.

34. *Gerasimov S.B.* A Sum Rule for Magnetic Moments and the Damping of the Nucleon Magnetic Moment in Nuclei // Phys. Lett. B. 1965. V. 2. P. 598.
35. *Drell S.D., Hearn A.C.* Exact Sum Rule for Nucleon Magnetic Moments // Phys. Rev. Lett. 1966. V. 16. P. 908.
36. *Teryaev O. V.* Analyticity and Higher Twists // Prog. Part. Nucl. 2013. V. 245. P. 195.
37. *Soffer J., Teryaev O.* QCD Radiative and Power Corrections and Generalized GDH Sum Rules // Prog. Part. Nucl. 2004. V. 70. P. 116004.
38. *Baikov P.A., Chetyrkin K.G., Kühn J.H.* Adler Function, Bjorken Sum Rule, and the Crewther Relation to Order α_s^4 in a General Gauge Theory // Prog. Part. Nucl. 2010. V. 104. P. 132004.
39. *Ayala C. et al.* Bjorken Polarized Sum Rule and Infrared-Safe QCD Couplings // Prog. Part. Nucl. 2018. V. 78. P. 1002.