

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ АНАЛИЗА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ О МНОЖЕСТВЕННОМ РОЖДЕНИИ ЧАСТИЦ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКЕ

А. В. Пономарева^{1, *}

¹ Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, 344090, Россия

В работе рассматриваются особенности распределения пионов, возникающих в ядерных взаимодействиях $(n + p)$ и $(p + C)$, с точки зрения геометрического подхода. На основе анализа критических значений параметра ν показано, что наблюдаемые пики могут быть интерпретированы как проявления неустойчивости решения граничной задачи, что в физическом смысле соответствует акту рождения частицы из вакуума. Предложена гипотеза о том, что процессы рождения частиц связаны с возникновением сингулярностей в гиперболическом пространстве состояний. Работа служит попыткой объединить геометрический и физический подходы для описания механизмов рождения пионов и их зависимости от структуры вакуума.

This work examines the features of pion distribution arising in nuclear interactions $(n + p)$ and $(p + C)$ from the standpoint of a geometric approach. Based on the analysis of critical values of the parameter ν , it is shown that the observed peaks can be interpreted as manifestations of the instability of the boundary value problem solution, which in physical terms corresponds to the act of particle creation from the vacuum. A hypothesis is proposed that particle production processes are associated with the emergence of singularities in the hyperbolic state space. This work represents an attempt to unify geometric and physical approaches for describing the mechanisms of pion production and their dependence on the vacuum structure.

PACS: 25.75.—q

ВВЕДЕНИЕ

Процессы рождения частиц в релятивистских ядерных столкновениях преимущественно описываются феноменологическими моделями. Единая общая теория ядерных столкновений пока находится в состоянии формирования. Как известно, при построении моделей описания рождения частиц наиважнейшим шагом является выбор переменных, на основе которых формулируются закономерности. Естественно, это связано с выбором пространства, которое адекватно данной задаче. В работах

* E-mail: physvol24@gmail.com

классиков релятивистской физики (см., например, [1–3]) была показана эффективность построения моделей описания с использованием быстрот частиц, участвующих в реакции. Естественным следствием использования переменной «быстрота» является рассмотрение релятивистских ядерных реакций в пространстве Лобачевского. Важно отметить, что экспериментально измеряемые величины: энергии, импульсы, углы — с учетом идентификации частиц однозначно преобразуются в релятивистские инвариантные быстроты. Таким образом, можно рассматривать множественное рождение частиц в пространстве относительных быстрот и, соответственно, использовать свойства пространства Лобачевского для формулировки новых закономерностей. Так, например, в работе [4] доказано существование направленного ядерного излучения на основе анализа экспериментальных данных с использованием основного параметра пространства Лобачевского — угла параллельности. Также в [5] была показана эффективность разделения «жестких» и «мягких» процессов на основе рассмотрения площадей и периметров треугольников, образованных быстротами частиц в пространстве Лобачевского.

Методы дифференциальной геометрии давно и прочно вошли в арсенал современной теоретической физики, став языком описания фундаментальных взаимодействий — от гравитации в общей теории относительности до калибровочных полей в теории элементарных частиц. Однако их потенциал далеко не исчерпан в области анализа и интерпретации экспериментальных данных, где доминируют традиционные кинематические подходы. Данная работа представляет собой попытку преодолеть этот разрыв, предлагая и развивая геометрический формализм для анализа конфигураций частиц, рожденных в релятивистских столкновениях.

Основной целью данной статьи является демонстрация того, что для таких «гиперболических» конфигураций могут быть введены локальные геометрические инварианты — *эффективные гауссова и средняя кривизны*, которые оказываются чувствительными к динамике процесса множественного рождения частиц. Мы показываем, что вычисление этих кривизн позволяет не только дать геометрическую характеристику события, но и выявить критическое поведение системы. В частности, вводимый нами параметр ν , определяемый через отношение главных кривизн, демонстрирует ярко выраженную критическую точку, соответствующую резкому изменению в поведении вторичных частиц.

Таким образом, работа служит практической иллюстрацией мощного синтеза: мы переносим строгий математический аппарат дифференциальной геометрии поверхностей в область релятивистской кинематики, получая новые инструменты для диагностики неустойчивостей в процессах множественного рождения. Настоящая статья структурирована следующим образом: в разд.1 излагаются необходимые теоретические основы, в разд.2 вводится формализм эффективных кривизн, разд.3 содержит анализ экспериментальных данных и обсуждение результатов,

а в заключении подводятся итоги и намечаются перспективы дальнейших исследований.

1. ЛОКАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ: КРИВИЗНЫ И ИХ СМЫСЛ

1.1. Нормальная и главные кривизны поверхности. Кривизна линий, лежащих на поверхности, подчиняется ряду фундаментальных соотношений [6]. Рассмотрим вектор кривизны $\mathbf{r}'' = k\mathbf{v}$ некоторой кривой на поверхности. Проекция этого вектора на нормаль к поверхности в данной точке называется *нормальной кривизной* k_s данной кривой, а обратная ей величина R — радиусом нормальной кривизны.

Поскольку нормаль к поверхности считается ориентированной, нормальная кривизна может быть как положительной, так и отрицательной. Знак k_s зависит от взаимной ориентации нормали к поверхности и вектора кривизны кривой.

Нормальная кривизна достигает экстремальных значений в так называемых *главных направлениях*. Соответствующие им экстремальные значения нормальной кривизны k_1 и k_2 ($k_1 \geq k_2$) называются *главными кривизнами* поверхности в точке. Они связаны с важнейшими инвариантами поверхности — *средней кривизной* H и *гауссовой кривизной* K — следующими соотношениями [6]:

$$k_{1,2} = H \pm \sqrt{H^2 - K}, \quad (1)$$

$$K = k_1 k_2, \quad 2H = k_1 + k_2. \quad (2)$$

Главные кривизны полностью определяют локальную геометрию поверхности. Если k_1 и k_2 имеют одинаковый знак ($K > 0$), поверхность в окрестности точки имеет *эллиптический* тип (выпуклая или вогнутая, подобная сфере) (рис. 1, б). Если знаки разные ($K < 0$), тип точки *гиперболический* (псевдосфера) (рис. 1, в). В случае, когда одна из главных

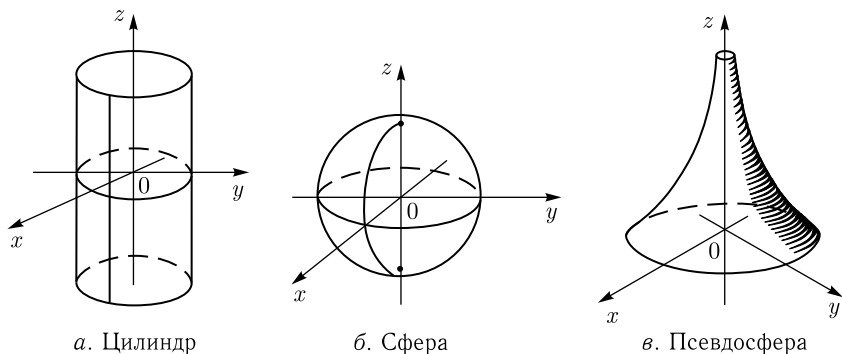


Рис. 1. Основные типы поверхностей оболочек

кривизн равна нулю ($K = 0$), точка является *параболической* (как на цилиндре) (рис. 1, а).

1.2. Теорема Гаусса–Бонне и ее следствия для геодезических треугольников. Локальные свойства поверхности, описываемые гауссовой кривизной K , тесно связаны с ее глобальными топологическими характеристиками. Эта связь устанавливается фундаментальной *теоремой Гаусса–Бонне* [7]. Для замкнутой ориентируемой поверхности Σ она утверждает, что

$$\int_{\Sigma} K d\sigma = 2\pi\chi(\Sigma),$$

где $\chi(\Sigma)$ — эйлерова характеристика поверхности, не зависящая от способа ее разбиения.

Наиболее важным для наших дальнейших построений является одно из следствий этой теоремы, касающееся геодезических треугольников. *Геодезическим треугольником* называется область на поверхности, гомотопная треугольнику и ограниченная тремя отрезками геодезических линий, являющихся аналогами прямых на поверхности.

Теорема 1 (о сумме углов геодезического треугольника). Сумма углов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ геодезического треугольника Δ на поверхности связана с гауссовой кривизной следующим соотношением [7]:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi + \int_{\Delta} K d\sigma. \quad (3)$$

Из формулы (2) непосредственно вытекает качественная связь между знаком кривизны и геометрией:

- если $K > 0$ (эллиптическая геометрия), то сумма углов треугольника *больше* π ;
- если $K = 0$ (евклидова геометрия), то сумма углов *равна* π ;
- если $K < 0$ (гиперболическая геометрия), то сумма углов *меньше* π .

Таким образом, тот факт, что сумма углов треугольника отлична от π , является прямым указанием на нетривиальную (ненулевую) гауссову кривизну области, в которой этот треугольник находится. В контексте релятивистской ядерной физики конфигурации вторичных частиц могут быть интерпретированы как геодезические треугольники в пространстве с эффективной кривизной, что открывает путь к применению данного геометрического аппарата.

2. ЭФФЕКТИВНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ ДЛЯ КОНФИГУРАЦИЙ ЧАСТИЦ

В данном разделе предлагается методика параметризации конфигураций вторичных частиц, основанная на аналогии с геодезическими треугольниками в пространстве с постоянной отрицательной кривизной.

Вводимые ниже параметры интерпретируются как *эффективные* (или *калибровочные*) величины, позволяющие количественно характеризовать локальную геометрию в пространстве быстрот.

В качестве базового масштабного параметра, характеризующего «размер» треугольной конфигурации в пространстве быстрот, введем *гиперболический модуль*. Для треугольника со стороной a_2 и противолежащим углом α_2 он определяется как

$$\text{module} = \frac{\text{sh}(a_2)}{\sin(\alpha_2)}. \quad (4)$$

Данный параметр является безразмерным и, по аналогии с классической геометрией, может рассматриваться как отношение характерного «размера» конфигурации ($\sinh(a_2)$) к угловому масштабу ($\sin(\alpha_2)$).

Как следует из теоремы 1, для геодезического треугольника на поверхности с постоянной гауссовой кривизной K существует прямая пропорциональность между *дефектом треугольника* (величиной $\sum \alpha_i - \pi$) и интегралом от кривизны по его площади.

Руководствуясь этой фундаментальной связью, введем определение *эффективной гауссовой кривизны* K_{eff} для анализируемой конфигурации:

$$K_{\text{eff}} = \frac{\sum_{i=1}^3 \alpha_i - \pi}{\text{module}}. \quad (5)$$

В данном определении числитель $\sum \alpha_i - \pi$ представляет собой дефект треугольника, который в гиперболической геометрии ($K < 0$) отрицателен и пропорционален площади. Знаменатель (module) выступает в роли калибровочного множителя, обеспечивающего безразмерность итоговой кривизны. Таким образом, знак K_{eff} напрямую определяется знаком дефекта, что находится в полном соответствии с теоремой Гаусса–Бонне.

По аналогии со средней кривизной мы вводим эффективный параметр H_{eff} , характеризующий форму конфигурации. Он определяется как усредненное отношение гиперболических высот к гиперболическим длинам сторон:

$$H_{\text{eff}} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\text{sh}(h_i)}{\text{sh}(a_i)} \right). \quad (6)$$

Данный параметр является безразмерным и отражает соотношение между поперечными и продольными масштабами треугольника в пространстве быстрот.

Имея в своем распоряжении эффективные значения K_{eff} и H_{eff} , мы можем вычислить и *эффективные главные кривизны* k_1 , k_2 , используя

стандартное соотношение из дифференциальной геометрии (1):

$$k_{1,2} = H_{\text{eff}} \pm \sqrt{H_{\text{eff}}^2 - K_{\text{eff}}}. \quad (7)$$

Для анализа устойчивости конфигурации в рамках предложенной геометрической модели был введен безразмерный параметр ν , характеризующий отношение главных эффективных кривизн:

$$\delta = \sqrt{\left| \frac{k_2}{k_1} \right|}, \quad k_1 > k_2, \quad \nu = \arccos \left(\frac{1}{1 + \delta} \right).$$

Как следует из теоремы 2 [8], угловая точка $p(\nu)$ есть точка неустойчивости задачи Римана–Гильберта для канонических куполов тогда и только тогда, когда

$$\arccos \left(\frac{1}{1 + \delta_i} \right) \leq \nu_i \leq \text{arccctg} \sqrt{t_i},$$

где t_i — единственный положительный корень уравнения (4), в котором $\delta = \delta_i$, $K = K_i$, $E = E_i$ — гауссова кривизна и эйлерова разность поверхности S в точке p_i ($i = 1, \dots, n$).

Таким образом, нижняя граница задается аналитической формулой $\nu = \arccos(1/1 + \delta)$, а верхняя является решением уравнения (4) [8].

Проведенный анализ экспериментальных данных выявил, что наблюдаемое значение параметра $\nu \approx 0,71$ находится в непосредственной близости от верхней границы предсказанного теоретического интервала неустойчивости (таблица). Это совпадение указывает на то, что экспериментально зафиксированное резкое изменение поведения системы соответствует выходу в критическую область, предсказанную моделью.

Диапазоны ν по энергиям

Реакция	Энергия	$\nu_{\min}$	$\nu_{\max}$
$n + p$	1,43	0,148336	0,711792
	2,23	0,027055	0,712069
	3,83	0,017137	0,712084
	5,2	0,021034	0,712090
$p + C$	10	0,058474	0,695243

Для анализа конфигураций частиц используем их представление в виде треугольников в пространстве быстрот, метрика которого соответствует геометрии Лобачевского. В рамках данной модели аналогом «высоты» треугольника является поперечный импульс частицы (рис. 2). Угол между асимптотами, проведенными из основания высоты, называется *углом параллельности* $\Pi_L(h)$ и вычисляется как

$$\Pi_L(h) = 2 \arctg(e^{-h}).$$

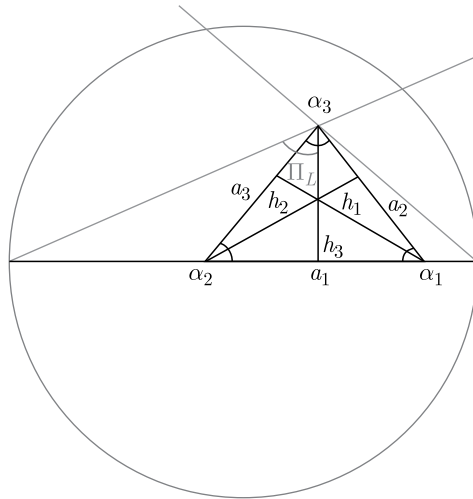


Рис. 2. Конфигурация из трех частиц в геометрии Лобачевского: 1 — налетающая частица; 2 — частица мишени; 3 — вторичная частица

Далее мы исследуем связь между $\sinh(h_3)$ и параметром $2\Pi(h_3) - \alpha_3$, введенным в работе [4] при описании направленного ядерного излучения, для вторичной частицы (пиона) в реакциях $n(5,2 \text{ ГэВ}) + p$ и $p(10 \text{ ГэВ}) + C$, которая, как будет показано, выявляет критическое поведение системы.

3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В настоящем разделе рассматриваются результаты анализа для пионных событий. Исходными переменными служат гиперболическая высота h_3 (через $\sinh(h_3)$), являющаяся геометрическим аналогом поперечной компоненты скорости, и комбинация угловых параметров $2\Pi(h_3) - \alpha_3$. Введенный параметр ν , характеризующий соотношение главных кривизн, используется в качестве индикатора локальной геометрической устойчивости конфигурации.

На распределениях $\sinh(h_3)$ от $2\Pi(h_3) - \alpha_3$ для пионов наблюдаются выраженные пиковые структуры, сохраняющие форму и границы при изменении энергии и выборки (рис. 3, 4). Наиболее выраженные пики приходятся на значения параметра $\nu \approx 0,71$ для реакции $n + p$ и $\nu \approx 0,69$ для реакции $p + C$. При этом в случае реакции $n + p$ значительная доля событий сосредоточена вблизи границы $\nu \approx 0,71$, тогда как для $p + C$ распределение более равномерно (рис. 5). Этот факт указывает на различие геометрического поведения систем при переходе через критическую область параметра ν .

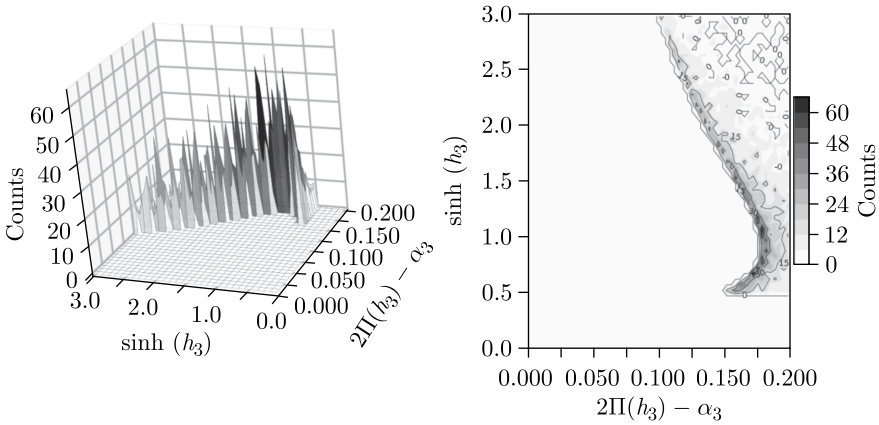


Рис. 3. $\sinh(h_3)$ как функция $\Delta_{12}^3 = 2\Pi(h_3) - \alpha_3$ для энергии 5,2 ГэВ реакции $n + p$

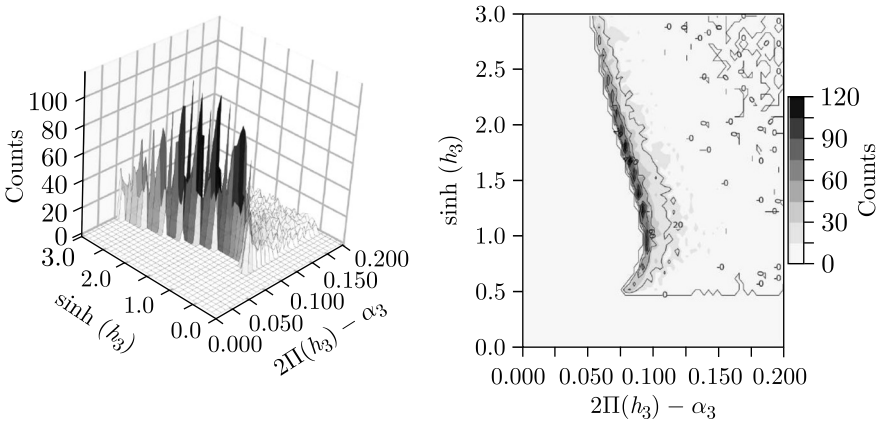
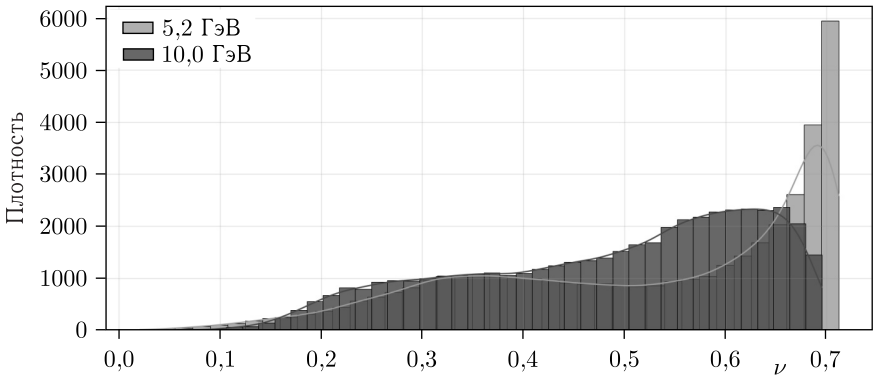


Рис. 4. $\sinh(h_3)$ как функция $\Delta_{12}^3 = 2\Pi(h_3) - \alpha_3$ при энергии 10 ГэВ реакции $p + C$

Согласно теореме 2 [8] (см. разд. 2), значение $\nu \approx 0,71$ соответствует области потери устойчивости решения. В терминах дифференциальной геометрии это состояние связано с появлением сингулярности — точкой, где гладкое решение перестает существовать. Мы предполагаем, что в контексте релятивистской ядерной физики данный эффект может быть трактован как момент нарушения непрерывности вакуумного состояния, т.е. как условие, при котором возможно рождение частицы. Таким образом, область значений $\nu \approx 0,71$ можно рассматривать как критическую границу перехода от устойчивого к неустойчивому состоянию геометрической конфигурации, что и отражается в виде пиков в экспериментальных распределениях.

Рис. 5. Распределение ν по энергиям

Следует отметить, что данный результат пока нельзя считать универсальным. Анализ проведен только для пионных событий и двух реакций ($n + p$ и $p + C$); для подтверждения или опровержения гипотезы о геометрической природе неустойчивости необходимо рассмотреть другие каналы и энергии. Тем не менее совпадение характерных значений ν с теоретическими границами устойчивости *указывает на возможную глубокую связь геометрических свойств пространства быстрых с динамикой процессов множественного рождения.*

ВЫВОДЫ

1. *Теоретический фундамент.* На основе методов дифференциальной геометрии и теории устойчивости решений задачи Римана–Гильберта *теоретически предсказано* существование критической области для параметра ν . Для ее нижней границы получена явная аналитическая формула $\nu = \arccos(1/(1 + \delta))$.

2. *Геометризация задачи.* Предложен новый подход к анализу конфигураций частиц, позволяющий вычислять для них эффективные кривизны (K , H) и параметр анизотропии δ , с использованием аппарата гиперболической геометрии (угол параллельности, теорема синусов). Это позволяет перейти от кинематического описания к *геометрической характеристике* событий.

3. *Согласование с экспериментом.* Проведенный анализ экспериментальных данных по множественному рождению частиц показал, что значение $\nu \approx 0,71$, соответствующее резкому изменению поведения системы, *находится в согласии* с предсказанием теоретической модели и соответствует выходу в область неустойчивости.

4. *Перспективы.* Разработанный метод открывает новые возможности для анализа механизмов множественного рождения частиц и поиска эффектов геометрической природы в релятивистской ядерной физике. Его

дальнейшее развитие и применение для анализа данных с коллайдеров следующего поколения представляется чрезвычайно перспективным.

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность А. А. Балдину, Э. Г. Балдиной, Е. А. Клевцовой за постановку задачи, предоставление экспериментальных данных, полученных при помощи пузырьковых камер, поддержку и полезные обсуждения в ходе выполнения настоящего исследования.

Финансирование. Поездка на конференцию была оплачена Институтом перспективных исследований «Омега» (Дубна).

Конфликт интересов. Автор данной работы заявляет, что у нее нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Клейн Ф. О геометрических основаниях лоренцевой группы // Новые идеи в математике. 1914. Вып. 5. С. 144–188.
2. Котельников А. П. Принцип относительности и геометрия Лобачевского // In memoriam N. I. Lobatshevskij. Т. 2. Казань, 1927. С. 37–64.
3. Черников Н. А. Геометрия Лобачевского и релятивистская механика // ЭЧАЯ. 1973. Т. 4, вып. 3. С. 773–810.
4. Балдин А. А. Пространство Лобачевского в релятивистской ядерной физике // Применение и развитие идей Лобачевского в современной физике: Тр. междунар. семинара, посвященного 75-летию проф. Н. А. Черникова. Дубна, 2004. С. 103–116.
5. Балдин А. А., Балдина Э. Г., Кладницкая Е. Н., Рогачевский О. В. // Письма в ЭЧАЯ. 2004. Т. 1, № 4(121). С. 7–16.
6. Векун И. Н. Основы тензорного анализа и теории ковариантов. М.: Наука, 1978. 256 с.
7. Тайманов И. А. Лекции по дифференциальной геометрии. 2-е изд., доп. Новосибирск: Изд-во Ин-та мат., 2013. 203 с.
8. Tyurikov E. V. One Case of Quasi-Correctness of Canonical Boundary Value Problem of the Membrane Theory of Convex Shells // J. Appl. Math. Mech. 2023. V. 103, Iss. 10. P. e202200334.