

ФУНКЦИЯ ФЕРМИ И РАДИАЛЬНАЯ ЧАСТЬ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА ДЛЯ КУЛОНОВСКОГО ПОЛЯ

В. Н. Тихонов^{a, 1}

^a Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт», Москва, 123182, Россия

Приводятся способы вычисления функции Ферми в области малых и больших энергий. Найдена феноменологическая формула, описывающая поведение функции Ферми при малых энергиях электрона, и на ее основе предложена методика нахождения функции Ферми с использованием имеющихся таблиц. Получена формула, выражающая функцию Ферми через радиальные части решения уравнения Дирака для кулоновского поля, которая определяется только через действительные функции. Это позволяет находить функцию Ферми при больших энергиях, не прибегая к сложным расчетам.

This paper presents methods for calculating the Fermi function in the low- and high-energy regimes. A phenomenological formula describing the behavior of the Fermi function at low electron energies is derived, and on its basis a method for evaluating the Fermi function using existing tables is proposed. A formula expressing the Fermi function in terms of the radial components of the solution of the Dirac equation for a Coulomb field is obtained; this representation involves only real functions. This makes it possible to calculate the Fermi function at high energies without resorting to complicated calculations.

PACS: 23.40.–s

ВВЕДЕНИЕ

Цель настоящей работы — создать алгоритм нахождения функции Ферми при любых энергиях электрона, не прибегая к созданию сложных программ и к сложным вычислениям, таким как интегрирование выражений, содержащих специальные функции и обычные функции от комплексной переменной и комплексных параметров.

Как известно, в выражение для вероятности β -распада, в сечение захвата нейтроном ядрами, входит функция Ферми, определяемая следующим образом [1–3]:

$$F(E, Z) = \frac{\psi\psi^*}{\psi_f\psi_f^*}, \quad (1)$$

где Z — заряд ядра атома, в поле которого летит электрон; ψ — волновая функция электрона в кулоновском поле ядра и поле электронной оболочки атома в месте рождения электрона; ψ_f — волновая функция свободного электрона. Следуя Ферми [1], значения волновых функций будем брать на поверхности ядра. Заметим, что

¹E-mail: vik.nik.tih@mail.ru

$F(E, Z)$ — функция безразмерная. Здесь и далее будем выражать энергию электрона E и энергию нейтрино E_ν в единицах mc^2 (m — масса электрона, c — скорость света), импульс электрона $p(E) \equiv p = \sqrt{E^2 - 1}$ в mc , длину в $\lambda = \hbar/(mc) = 3,86 \cdot 10^{-11}$ см (комптоновская длина волны электрона).

Функция Ферми описывает взаимодействие вылетающего электрона с электрическим полем атома. Точный расчет $F(E, Z)$ довольно трудоемок и требует учета поправок на размер ядра, распределения заряда в ядре, экранировки заряда ядра электронами атома и других эффектов. Таблицы этой функции [2, 4] получены с помощью численного решения уравнения Дирака с самосогласованным потенциалом Хартри–Фока–Слетера. Расчеты проведены только до энергий вылетающего электрона $E \approx 10\text{--}15$ МэВ. Этот диапазон значительно меньше диапазона энергий при захвате нейтрино от ускорителя или космических нейтрино. Знание функции Ферми при энергиях вплоть до 60 МэВ очень важно для анализа эксперимента [5], в котором участвуют нейтрино от ускорителя.

Необходимо отметить, что данные работ [1] и [4] различаются. В недавнем исследовании [6] было показано, что разные варианты расчета функции Ферми дают значения, различающиеся вплоть до $\sim 15\%$ для кинетической энергии электрона менее 10–15 МэВ. Как будет показано ниже, данные таблицы в работе [1] вызывают больше доверия.

МАЛЫЕ ЭНЕРГИИ

Рассмотрим поведение функции $S(E, Z) = F(E, Z)p(E)$ при малых энергиях. Такая функция входит, например, в выражение для вероятности β -распада, в сечение обратного β -распада. Для примера представим на рис. 1 значения функции $S(E, Z)$ с функцией Ферми, взятой из таблицы работы [1], при разных значениях Z .

Из рис. 1 видно, что произведение ферми-функции из таблицы [1] и импульса электрона является функцией, линейно зависимой от E . Такая зависимость наблю-

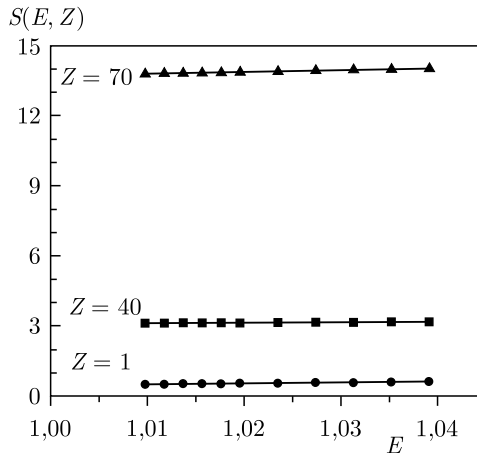


Рис. 1. Значения произведения функции Ферми, взятой из таблицы работы [1], и импульса электрона. Кружки соответствуют $Z = 1$, квадраты — $Z = 40$, треугольники — $Z = 70$

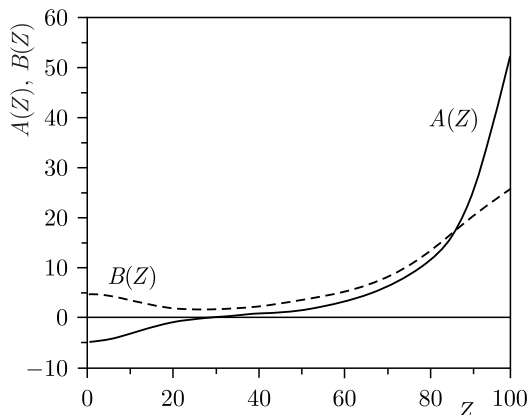


Рис. 2. Коэффициенты линейной аппроксимации. График функции $A(Z)$, имеющей размерность E , представлен сплошной линией, график безразмерной функции $B(Z)$ — штриховой

дается для всех значений Z . Продолжим функцию $S(E, Z)$ до $E = 1$ (например, с помощью метода наименьших квадратов) и опишем ее как

$$S(E, Z) = A(Z) + B(Z)E. \quad (2)$$

Проведя аппроксимацию для всех значений Z , получим функции $A(Z)$ и $B(Z)$, приведенные на рис. 2.

Теперь мы можем извлечь функцию Ферми делением $F_p(E, Z)$ на $p(E)$ или использовать непосредственно функцию $S(E, Z)$ при любых кинетических энергиях электрона, меньших 5 кэВ. Знание функции Ферми при низких энергиях электрона важно при рассмотрении β -распада трития, в котором максимальная плотность в распределении электронов по энергии приходится на область 5 кэВ.

ВЫСОКИЕ ЭНЕРГИИ

В работе [2] отмечено, что с увеличением энергии электрона поправки к функции Ферми, связанные с учетом атомной оболочки, уменьшаются и при кинетической энергии электрона более 500 кэВ становятся менее 2%, а при энергии более 10 МэВ — менее 1%. Поэтому, если кинетическая энергия электрона больше 10 МэВ, при расчетах функции Ферми можно ограничиться использованием решения уравнения Дирака для электрона в кулоновском поле ядра.

Решение уравнения Дирака для электрона в кулоновском поле известно давно (например, из работы Роуза [7]), и оно приводится во многих учебниках и монографиях (например, в работе [8]).

Функция Ферми $F(E, Z)$ имеет следующий вид [2]:

$$F(E, Z) = \frac{G_0^2 + F_2^2}{2p^2}, \quad (3)$$

где G_0 и F_2 — радиальные части решения уравнения Дирака. Структура функций G_0 и F_2 такова, что в них входит сумма комплексно-сопряженных функций или разность

комплексно-сопряженных функций, умноженная на мнимую единицу. Это говорит о том, что G_0 и F_2 — реальные функции. Если G_0 и F_2 взять из решения уравнения Дирака для кулоновского поля, то F обозначим как F_c .

Если сразу воспользоваться реальностью функций G_0 и F_2 , то получится известное выражение для G_0 и F_2 , приведенное в работе [8], в котором присутствуют мнимая единица и множитель:

$$\sqrt{\frac{\pm 1 + i \frac{\alpha Z}{p}}{\gamma + \frac{\alpha Z E}{p}}}. \quad (4)$$

Также в ней присутствует вырожденная гипергеометрическая функция, зависящая от комплексной переменной и комплексного параметра. Это создает определенные трудности при вычислении функции Ферми. Чтобы избежать их, сначала возведем G_0 и F_2 в квадрат и только затем воспользуемся упомянутым свойством комплексных чисел. Тогда множитель (4) будет возведен в квадрат, а чтобы преодолеть трудность, связанную с комплексностью аргумента и параметров вырожденной гипергеометрической функции, воспользуемся следующим интегральным представлением вырожденной гипергеометрической функции:

$$M(a, b, u) \equiv M = C \int_0^1 e^{ut} t^{a-1} (1-t)^{b-a-1} dt. \quad (5)$$

Выделяя реальную и мнимую части в (5), получим

$$\operatorname{Re} M(E) = \operatorname{Re}(C) \int_0^1 f_1 \cos(f_2(E, t)) dt - \operatorname{Im}(C) \int_0^1 f_1 \sin(f_2(E, t)) dt, \quad (6)$$

$$\operatorname{Im} M(E) = \operatorname{Im}(C) \int_0^1 f_1 \cos(f_2(E, t)) dt + \operatorname{Re}(C) \int_0^1 f_1 \sin(f_2(E, t)) dt, \quad (7)$$

где $f_1(E, t) = e^{\operatorname{Re} u} t^{\operatorname{Re} a-1} (1-t)^{\operatorname{Re} b - \operatorname{Re} a-1}$, $f_2(E, t) = t \operatorname{Im} u + \ln(t) \operatorname{Im} a + \ln(1-t) \times \times (\operatorname{Im} b - \operatorname{Im} a)$. В нашей задаче a , b и C имеют следующий вид: $a = \gamma + 1 + i \frac{\alpha Z E}{\sqrt{E^2 - 1}}$,

$b = 2\gamma + 1$, $u = i \frac{2R\sqrt{E^2 - 1}}{\lambda}$, $C = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a(E)) \Gamma(b-a(E))}$. Здесь $\Gamma(x)$ — гамма-функция от x , $\gamma = \sqrt{1 - (\alpha Z)^2}$, α — постоянная тонкой структуры, R — радиус ядра, выраженный в Фм, λ — комптоновская длина, выраженная в Фм ($1 \text{ Фм} = 10^{-13} \text{ см}$).

Условие $\operatorname{Re} b(E) > \operatorname{Re} a(E)$ в нашей задаче выполняется. Поэтому интегральное представление вырожденной гипергеометрической функции $M(a, b, u)$ в виде (5) возможно.

После того как мы возведем G_0 и F_2 в квадрат и распишем получившиеся функции в виде сумм реальной части функции плюс мнимая часть функции, получим следующее выражение для функции Ферми:

$$F_c(E, Z) = \frac{B(E) [(E+1) G_0(E, Z) + (1-E) F_2(E, Z)]}{E}. \quad (8)$$

В этой формуле функции G_0 , F_2 и $B(E)$ имеют вид

$$G_0(E, Z) = [h(E) \cos(q(E)) + s(E) \sin(q(E))] [\operatorname{Re} M(E, Z)^2 - \operatorname{Im} M(E)^2] - \\ - 2[s(E) \cos(q(E)) - h(E) \sin(q(E)) \operatorname{Re} M \operatorname{Im} M] + \\ + [\operatorname{Re} M(E)^2 + \operatorname{Im} M(E)^2] \left(\gamma^2 + \left(\frac{\alpha Z E}{p(E)} \right)^2 \right), \quad (9)$$

$$F_2(E, Z) = [v(E) \cos(q(E)) + w(E) \sin(q(E))] [\operatorname{Re} M(E, Z)^2 - \operatorname{Im} M(E)^2] - \\ - 2[w(E) \cos(q(E)) - v(E) \sin(q(E)) \operatorname{Re} M \operatorname{Im} M] - \\ - [\operatorname{Re} M(E)^2 + \operatorname{Im} M(E)^2] \left(\gamma^2 + \left(\frac{\alpha Z E}{p(E)} \right)^2 \right), \quad (10)$$

$$B(E) = \frac{(q(E))^{2(\gamma-1)} e^{\frac{\pi \alpha Z E}{p}} \left(\left| \Gamma \left(\gamma + i \frac{\alpha Z E}{p} \right) \right| \right)^2}{\Gamma(2\gamma + 1)^2}, \quad (11)$$

где введены следующие обозначения:

$$q(E) = \frac{2p(E)R}{\lambda}, \quad h(E) = \gamma - \frac{(\alpha Z)^2 E}{p(E)^2}, \quad s(E) = \frac{\alpha Z (\gamma + E)}{p(E)}, \\ v(E) = -\gamma - \frac{(\alpha Z)^2 E}{p(E)^2}, \quad w(E) = \frac{\alpha Z (\gamma - E)}{p(E)}. \quad (12)$$

На рис. 3 в качестве примера представлены аппроксимированные значения функции Ферми из работы [2] и расчет по формулам (7)–(11) и $R = 1,2\sqrt[3]{A}$. Видно, что графики функций наложились один на другой. Это говорит о хорошем согласии результатов расчетов по формулам (8)–(12) с данными [2] и, как следствие, подтверждает вывод о большем доверии к таблицам из работы [2], чем из [4].

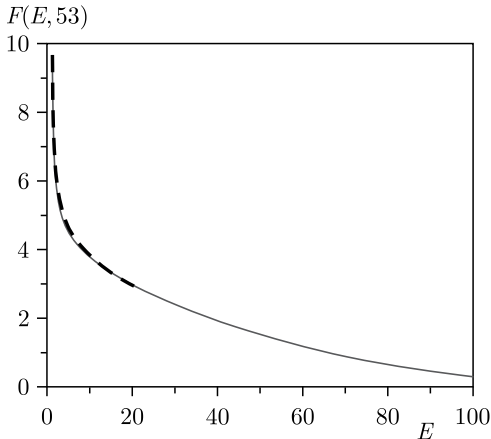


Рис. 3. Аппроксимированные значения функции Ферми: штриховая линия — из таблиц работы [2]; сплошная — расчет по формуле (7)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение отметим, что выявленная в работе закономерность линейного поведения произведения импульса электрона, умноженного на ферми-функцию, позволяет находить ферми-функцию при любых малых энергиях, основываясь на данных таблицы функции Ферми [2], а полученная новая формула для вычисления ферми-функции для кулоновского поля позволяет вычислять ее при значениях энергии электрона выше, чем приведенные в таблицах. Такой подход дает возможность избежать трудностей, связанных с вычислениями по методу Хартри–Фока–Слетера.

Автор выражает большую благодарность Ю. С. Лютостанскому, М. Д. Скорохвату, А. В. Ломоносову, С. В. Сухотину.

Данная работа финансировалась за счет средств Федерального государственного бюджетного учреждения «Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Fermi E.* // *Z. Phys.* 1934. V. 88. P. 161.
2. *Джелепов Б. С., Зырянова Л. Н., Суслов Ю. П.* Бета-процессы. Л.: Наука. Ленингр. отд-ние, 1972. 373 с.
3. *Джелепов Б. С., Зырянова Л. Н.* Влияние электрического поля атома на бета-распад. Л.: Изд-во АН СССР, 1956. 312 с.
4. *Behrens H., Janescke J.* Numerical Tables for Beta-Decay and Electron Capture. Berlin: Springer-Verlag, 1969. 316 p.
5. *Лютостанский Ю. С., Фазлиахметов А. Н., Коротеев Г. А., Тихонов В. Н.* // Письма в ЖЭТФ. 2025. Т. 122, вып. 9. С. 521–526.
6. *Фазлиахметов А. Н., Лютостанский Ю. С., Коротеев Г. А., Осипенко А. П., Тихонов В. Н.* // ЭЧАЯ. 2023. Т. 54, вып. 3. С. 668–675.
7. *Rose M. E.* // *Phys. Rev.* 1937. V. 51. P. 484.
8. *Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1989. 728 с.

Получено 25 февраля 2026 г.